Алгебра и логика, ????, № ?? (2023), 1—???

УДК 512.544.33

Многообразия степенных R-групп

М. Г. Амаглобели, А. Г. Мясников, Т. Т. Надирадзе

К 80-летию В. Д. Мазурова

Понятие степенной R-группы, где R — произвольное ассоциативное кольцо с единицей, ввёл Р. Линдон в работе [1]. А. Г. Мясников и В. Н. Ремесленников уточнили понятие степенной R-группы, введя дополнительную аксиому [2]. Новое понятие R-группы является непосредственным обобщением понятия R-модуля на случай некоммутативных групп. В статье М. Г. Амаглобели и В. Н. Ремесленникова [3] R-группы с этой дополнительной аксиомой названы MR-группами. Оказалось, что все ранее изученные R-группы Линдона на самом деле являются MR-группами (включая свободную $\mathbb{Z}[t]$–группу Линдона $F^{\mathbb{Z}[t]}$). В данной работе изучаются только те R-группы, которые являются MR-группами. Для простоты обозначений всюду далее, если не оговорено противное, под R-группой мы будем понимать MR-группу, а класс всех R-групп обозначим $\mathcal{M}_R$. Хорошо известна роль тензорного расширения кольца скаляров для модулей. Авторы работы [2] определили точный аналог этой конструкции для произвольной R-группы — тензорное пополнение. В работе [4] предложен конкретный способ построения тензорного пополнения данной R-группы. Систематическое изучение R-групп начато в работах [3–8]. Отметим, что результаты этих работ оказались весьма полезны при решении известных проблем Тарского.

В настоящей работе вводятся понятия многообразия степенных R-групп и тензорного пополнения групп в многообразии. Изучается связь

Работа авторов выполнена при поддержке Грузинского национального фонда Шота Руставели (код проекта FR-21-4713).

между свободными группами данного многообразия при различных кольцах скаляров. Даётся описание абелевых многообразий R-групп. Кроме того, в категории R-групп вводятся различные аналоги понятия n-ступенно нильпотентной и n-ступенно разрешимой R-группы и проводятся их сравнение в этой категории. Устанавливается, что пополнение 2-ступенно нильпотентной R-группы является 2-ступенно нильпотентной.

В определении многообразия R-групп мы следуем стандартной схеме. Существенное отличие изучаемого случая от классического в том, что, во-первых, понятие многообразия расслаивается в зависимости от кольца скаляров, а во-вторых, вербальная подгруппа, вообще говоря, не порождается значениями слов, определяющих многообразие, она порождается ими как R-идеал в классе $\mathcal{M}_R$. Эта принципиальная особенность происходит от того, что сам класс $\mathcal{M}_R$ является квазимногообразием (а не многообразием) в языке L_{gr}^R теории групп с экспонентами в R. Поэтому, все подклассы R-групп, определяемые в $\mathcal{M}_R$ R-тождествами (так называемые $\mathcal{M}_R$-эквациональные классы), являются многообразиями только относительно $\mathcal{M}_R$, а в языке L_{gr}^R они — квазимногообразия. К счастью, функтор тензорного пополнения связывает слои многообразий по различным кольцам скаляров, а общая теория порождающих и соотношений, свободных групп, и т.д., работает также хорошо в квазимногообразиях, как и в многообразиях. В двух последних секциях статьи сформулированы некоторые принципиальные открытые вопросы теории разрешимых и нильпотентных R-групп. Дело в том, что определения эквивалентные в классическом смысле, т.е., для $\mathbb{Z}$-групп, возможно дают неэквивалентные аналоги в классе R-групп над различными кольцами R. Часть результатов этой статьи были ранее анонсированы в различных препринтах и докладах, в частности, в [9].

1 Предварительные сведения

Напомним основные определения и факты, следуя работам [1, 2]. Пусть $L_{gr} = \{\cdot, {}^{-1}, e\}$ — групповой язык (сигнатура), где $\cdot$ — бинарная операция умножения, $^{-1}$ — унарная операция обращения, e — константный символ для единицы группы. В дальнейшем, если не оговорено противное, R всегда обозначает произвольное фиксированное ассоциативное кольцо с единицей 1 (возможно, некоммутативное!). Обогатим групповой язык L_{gr} до языка $L_{gr}^R = L_{gr} \cup \{f_\alpha(g) \mid \alpha \in R\}$, где $f_\alpha(g)$ — унарная алгебраическая операция, соответствующая возведению в степень α.

Определение 1.1 ([1])**.** Множество G будем называть линдоновой R-группой, если на нём определены операции $\cdot$, $^{-1}$, e, $\{f_\alpha(g) \mid \alpha \in R\}$ и выполнены следующие аксиомы (ниже для краткости выражение $f_\alpha(g)$ записываем в виде g^α):

1) аксиомы группы;

2) для всех $g, h \in G$ и $\alpha, \beta \in R$ выполняются равенства

$$g^1 = g, \ \ g^0 = e, \ \ e^\alpha = e; \tag{1.1}$$

$$g^{\alpha+\beta} = g^\alpha g^\beta, \ \ g^{\alpha\beta} = (g^\alpha)^\beta, \tag{1.2}$$

$$(h^{-1}gh)^\alpha = h^{-1}g^\alpha h. \tag{1.3}$$

Обозначим через $\mathcal{L}_R$ категорию линдоновых R-групп. Такие группы будем называть *группами с экспоненциированием в R* или R-степенными группами.

Аксиомы, приведённые выше, являются тождествами языка L_{gr}^R, поэтому класс $\mathcal{L}_R$ является многообразием алгебраических систем языка L_{gr}^R, и из общих теорем универсальной алгебры следует, что можно говорить об R-гомоморфизмах, свободных R-группах, о многообразиях R-групп, о квазимногообразиях R-групп и т. д.

Существуют абелевы линдоновы R-группы, не являющиеся R-модулями (см. [10], где подробно исследована структура свободной абелевой линдоновой R-группы). Авторы работы [2] добавили к аксиомам Линдона дополнительную схему аксиом, а именно следующую серию квазитождеств:

$$(MR\text{-аксиома}) \qquad \forall\, g,h \quad [g,h] = e \longrightarrow (gh)^\alpha = g^\alpha h^\alpha, \quad \alpha \in R, \tag{1.4}$$

где $[g,h] = g^{-1}h^{-1}gh$.

Определение 1.2 ([2]). Группу $G \in \mathcal{L}_R$ будем называть MR-группой, если G удовлетворяет MR-аксиоме (1.4).

Обозначим через $\mathcal{M}_R$ класс всех R-групп с экспоненциированием в R, удовлетворяющих MR-аксиоме (1.4). По определению $\mathcal{L}_R \supset \mathcal{M}_R$ и, кроме того, каждая абелева R-группа из $\mathcal{M}_R$ является R-модулем и наоборот. Большинство естественных примеров степенных R-групп лежат в классе $\mathcal{M}_R$. Произвольная группа является $\mathbb{Z}$-группой из класса $\mathcal{M}_{\mathbb{Z}}$; абелева делимая группа из $\mathcal{L}_{\mathbb{Q}}$ принадлежит $\mathcal{M}_{\mathbb{Q}}$; группа периода n является $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$-степенной MR-группой; свободная степенная линдонова R-группа является R-степенной MR-группой; произвольная про-p-группа является степенной $\mathbb{Z}_p$-группой из класса $\mathcal{M}_{\mathbb{Z}_p}$, где $\mathbb{Z}_p$ — это кольцо целых p-адических чисел; и т. д. (см. другие примеры в [2]).

В этой статье мы изучаем группы из класса $\mathcal{M}_R$, поэтому в дальнейшем, если не оговорено противное, под R-группой мы всегда будем понимать группу из класса $\mathcal{M}_R$.

Класс $\mathcal{M}_R$ является квазимногообразием в сигнатуре L_{gr}^R. Пусть $\mathcal{N}$ — некоторое многообразие $\mathcal{L}_R$-групп. Рассмотрим пересечение $\mathcal{N} \cap \mathcal{M}_R = \mathcal{N}_R$. Класс $\mathcal{N}_R$ также является квазимногообразием в языке L_{gr}^R, поэтому в нём существуют свободные R-группы, есть теория определяющих соотношений, класс $\mathcal{N}_R$ замкнут относительно взятия R-подгрупп, в нём можно вычилять R-фактор-группы [11]. Несмотря на то, что классы $\mathcal{N}_R$ являются квазимногообразиями, на них можно смотреть как на многообразия внутри квазимногообразия $\mathcal{M}_R$, то есть как на относительные биркгофы классы. По этой причине нам удобно называть их многообразиями R-групп.

Собственно говоря, для любой группы $G \in \mathcal{L}_R$ стандартным образом (см. [2]) вводятся понятия R-подгруппы, R-порождаемости, нормальной R-подгруппы и т. д. В частности, гомоморфизм R-групп $\varphi\colon G \to G^*$ называется R-гомоморфизмом, если $\varphi(g^\alpha) = \varphi(g)^\alpha$ для любых $g \in G$, $\alpha \in R$.

Определение 1.3 ([2]). Пусть $G \in \mathcal{L}_R$. Для $g,h \in G$, $\alpha \in R$, элемент

$$(g,h)_\alpha = h^{-\alpha}g^{-\alpha}(gh)^\alpha$$

назовём α-**коммутатором** элементов g и h.

Непосредственно проверяется, что для $G \in \mathcal{L}_R$ верны следующие утверждения:

$$(gh)^\alpha = g^\alpha h^\alpha (g,h)_\alpha \tag{1.5}$$

$$(g,h)_{-1} = [h^{-1}, g^{-1}] \tag{1.6}$$

$$f^{-1}(g,h)_\alpha f = (f^{-1}gf, f^{-1}hf)_\alpha \tag{1.7}$$

$$G \in \mathcal{M}_R \Longleftrightarrow \big([g,h] = e \Longrightarrow (g,h)_\alpha = e\big). \tag{1.8}$$

Последняя эквивалентность приводит к определению $\mathcal{M}_R$-идеала.

Определение 1.4 ([2])**.** Пусть $G \in \mathcal{L}_R$. Нормальная R-подгруппа $H \trianglelefteq G$ называется $\mathcal{M}_R$-**идеалом**, если для любых $g, h \in G$ из того, что $[g,h] \in H$ следует $(g,h)_\alpha \in H$ для любого $\alpha \in R$.

В дальнейшем, $\mathcal{M}_R$-идеалы H в G мы часто будем называть просто R-**идеалами** и обозначать $H \trianglelefteq_R G$. В [2] показано, что если $\varphi\colon G \to G^*$ — R-гомоморфизм групп из $\mathcal{M}_R$, то $\operatorname{Ker}\varphi$ — R-идеал в G, и если H — R-идеал в $G \in \mathcal{M}_R$, то $G/H \in \mathcal{M}_R$.

Предложение 1.1. *Пусть $G \in \mathcal{L}_R$. Тогда:*

1) *Пересечение любого непустого семейства R-идеалов в G является R-идеалом.*

2) *Для любого подмножества $Y \subseteq G$ существует наименьший по включению R-идеал в G, содержащий Y.*

Доказательство этого предложения стандартно.

Определение 1.5. Пусть $G \in \mathcal{L}_R$ и $Y \subseteq G$. Тогда через $id_R(Y)$ мы обозначаем наименьший по включению R-идеал в G, содержащий Y.

Строение R-идеалов проясняет следующая лемма.

Предложение 1.2. *Пусть $G \in \mathcal{L}_R$ и $Y \subseteq G$. Тогда $id_R(Y)$ есть объединение следующей возрастающей цепочки R-подгрупп в G:*

$$H_0 \leq H_1 \leq H_2 \leq \cdots \leq H_n \leq \cdots ,$$

где H_0 *— это нормальная* R*-подгруппа, порожденная* Y*, и*

$$H_{i+1} = \left\langle H_i, (g_1, g_2)_\alpha \mid \ [g_1, g_2] \in H_i, \ \alpha \in R \right\rangle_R.$$

Заметим, что все подгруппы H_i *являются нормальными подгруппами в* G*.*

Доказательство. По определению R-идеала все H_i содержатся в $id_R(Y)$. Из равенства (1.7) следует, что все H_i являются нормальными R-подгруппами в G, а потому нормальной подгруппой является и их объединение $\bigcup_i H_i$. Также непосредственно проверяется по построению, что $\bigcup_i H_i$ является R-идеалом. Следовательно, $id_R(Y) = \bigcup_i H_i$. □

Предложение 1.3. *Пусть* $G \in \mathcal{L}_R$ *и* $Y \subseteq G$*. Тогда для любого* R*-эндоморфизма* $\phi\colon G \to G$

$$\phi(id_R(Y)) \leq id_R(\phi(Y)).$$

В частности, если ϕ *— это* R*-автоморфизм, то*

$$\phi(id_R(Y)) = id_R(\phi(Y)).$$

Доказательство. В обозначениях предложения 1.2 достаточно доказать, что для любого $i \in \mathbb{N}$

$$\phi(H_i(Y)) \leq H_i(\phi(Y)),$$

где $H_i(Y)$ (соответственно $H_i(\phi(Y))$) — это подгруппа H_i, построенная в предложении 1.2 для множества Y (соответственно $\phi(Y)$). Ясно, что $\phi(H_0(Y)) \leq H_0(\phi(Y))$. По индукции мы можем предполагать, что $\phi(H_i(Y)) \leq H_i(\phi(Y))$. Из определения $H_{i+1}(Y)$ следует, что

$$\phi(H_{i+1}(Y)) \leq \left\langle \phi(H_i(Y)), \phi((g_1, g_2)_\alpha) \mid \ [g_1, g_2] \in H_i(Y), \ \alpha \in R \right\rangle_R \qquad (1.9)$$

Заметим, что $[g_1, g_2] \in H_i(Y)$ влечет $\phi([g_1, g_2]) = [\phi(g_1), \phi(g_2)] \in H_i(\phi(Y))$. Следовательно,

$$(\phi(g_1), \phi(g_2))_\alpha \in H_{i+1}(\phi(Y)) \qquad (1.10)$$

Тогда

$$\phi((g_1, g_2)_\alpha) = \phi(g_2^{-\alpha} g_1^{-\alpha} (g_1 g_2)^\alpha) = \phi(g_2)^{-\alpha} \phi(g_1)^{-\alpha} (\phi(g_1)\phi(g_2))^\alpha = (\phi(g_1), \phi(g_2))_\alpha,$$

Поэтому, из (1.10) имеем $\phi((g_1, g_2)_\alpha) \in H_{i+1}(\phi(Y))$, а значит по (1.9) $\phi(H_{i+1}(Y)) \leq H_{i+1}(\phi(Y))$, и утверждение предложения следует по индукции. □

Следствие. *Пусть $G \in \mathcal{L}_R$ и $Y \subseteq G$. Если Y инвариантно относительно всех R-эндоморфизмов G, то идеал $id_R(Y)$ инвариантен относительно всех R-эндоморфизмов G.*

Определяющую роль при изучении степенных R-групп играет операция тензорного пополнения. Она естественно обобщает понятие расширения кольца скаляров для модулей на некоммутативный случай. Тензорное пополнение используется при определении свободных конструкций в классе $\mathcal{M}_R$, включая понятие свободной R-группы.

Определение 1.6 ([2])**.** Пусть G — R-группа, $\mu\colon R \to S$ — гомоморфизм колец. Тогда S-группа $G^{S,\mu}$ называется тензорным S-пополнением R-группы G, если $G^{S,\mu}$ удовлетворяет следующему универсальному свойству:

1) существует гомоморфизм $\lambda\colon G \to G^{S,\mu}$, согласованный с μ (т. е. $\lambda(g^\alpha) = (\lambda(g))^{\mu(\alpha)}$ для всех $g \in G$ и $\alpha \in R$), такой, что $\lambda(G)$ S-порождает $G^{S,\mu}$, т. е. $\langle \lambda(G) \rangle_S = G^{S,\mu}$;

2) для любой S-группы H и любого гомоморфизма $\varphi\colon G \to H$, согласованного с μ, существует S-гомоморфизм $\psi\colon G^{S,\mu} \to H$, делающий коммутативной диаграмму

$$\begin{tikzcd} G \arrow[r, "\lambda"] \arrow[d, "\varphi"'] & G^{S,\mu} \arrow[dl, dashed, "\psi"] \\ H & \end{tikzcd} \qquad (\varphi = \lambda\psi).$$

При фиксированном гомоморфизме колец $\mu\colon R \to S$ такие групповые гомоморфизмы, как λ и φ из определения выше, согласованные с μ, далее будем называть просто R-гомоморфизмами.

Отметим, что если G — абелева R-группа, то $G^{S,\mu} \cong G \bigotimes\limits_R S$ — тензорное произведение R-модуля G на кольцо S. В [2] доказано, что для любой

R-группы G и произвольного гомоморфизма $\mu\colon R \to S$ тензорное пополнение $G^{S,\mu}$ существует и единственно с точностью до R-гомоморфизма.

В дальнейшем гомоморфизм колец $\mu\colon R \to S$ будет фиксирован, а потому вместо $G^{S,\mu}$ в доказательствах будем только использовать запись G^S. В приложениях μ чаще всего будет вложением колец, но и в таком случае R-гомоморфизм $\lambda\colon G \to G^S$ не всегда является вложением. В [2, предложение 11] дано общее достаточное условие, при котором λ является вложением. Работа Мясникова и Ремесленникова [5] посвящена изучению групп, которые изоморфно вкладываются в своё тензорное пополнение над кольцом R.

2 Многообразия R-групп

Многообразия тесно связаны со свободными группами, поскольку тождества — это элементы свободных групп. Пусть $X = \{x_i \mid i \in I\}$ — бесконечный счётный алфавит, R — кольцо с единицей, $F_R(X)$ — свободная R-группа с базой X. В [2] доказано, что для любых X и R ($\mathbb{Z} \leqslant R$) свободная R-группа $F_R(X)$ существует, единственна с точностью до R-изоморфизма и $F_R(X) \cong F(X)^R$, где $F(X)$ — абсолютно свободная группа с базой X. Элемент $w(x_1, \ldots, x_n) \in F_R(X)$ будем называть R-*словом* в алфавите X. Если $G \in \mathcal{M}_R$ и $g_1, \ldots, g_n \in G$, то отображение $x_i \mapsto g_i$ продолжается до R-гомоморфизма $\varphi\colon F_R(X) \to G$. Образ $w(x_1, \ldots, x_n)^\varphi = w(g_1, \ldots, g_n) \in G$ будем называть *значением* слова w при подстановке $x_1 = g_1, \ldots, x_n = g_n$.

Будем пользоваться следующими обозначениями:

$$w(\overline{x}) = w(x_1, \ldots, x_n), \quad \overline{x} = (x_1, \ldots, x_n),$$
$$w(\overline{g}) = w(g_1, \ldots, g_n), \quad \overline{g} = (g_1, \ldots, g_n),$$
$$w(G) = \bigl\{w(g_1, \ldots, g_n) \mid g_i \in G\bigr\}.$$

R-слово $w(\overline{x})$ будем называть *тождеством* в группе $G \in \mathcal{M}_R$, если $w(G) = e$.

Определение 2.1. Пусть W — произвольное множество R-слов в алфавите X. Тогда W определяет *многообразие* R-групп

$$\mathcal{N} = \mathcal{N}_R(W) = \bigl\{G \in \mathcal{M}_R \mid w(G) = e \;\; \forall\, w \in W\bigr\}.$$

Для тождеств естественным образом определяется понятие следствия: R-слово $u(\overline{x})$ **следует** из множества слов $W \subseteq F_R(X)$, если $u(G) = e$ для любой группы $G \in \mathcal{N}_R(W)$. Множества R-слов W_1 и W_2 **эквивалентны**, если каждое R-слово из W_2 является следствием из W_1 и наоборот. В частности, два R-слова, получаемые одно из другого переименованием букв, эквивалентны.

Определение 2.2. $\mathcal{M}_R$-идеал в G, порождённый множеством значений всех R-слов из множества W, назовём W-**вербальным идеалом** в G. Далее W-вербальный идеал обозначается через $W_R(G)$ или просто $W(G)$, если кольцо R ясно из контекста.

Предложение 2.1. *W-вербальный идеал $W_R(F_R(X))$ в $F_R(X)$, порождённый множеством R-слов $W \subseteq F_R(X)$, состоит в точности из всех следствий множества W в $F_R(X)$.*

Доказательство. Пусть $\overline{W}$ — множество всех следствий из W. Ясно, что

$$W \subset \overline{W} \subset W(F_R(X))$$

(это включение верно потому, что $G = F_R(X)/W_R(F_R(X))$ — R-группа из $\mathcal{N}_R(W)$ и только элементы из $W_R(F_R(X))$ являются тождествами в этой группе). Более того, $\overline{W}$ — нормальная R-подгруппа, так как $\overline{W}$ замкнуто относительно произведения, взятия обратного, возведения в степень из R и эндоморфизмов (в частности, инвариантно относительно сопряжений). Осталось показать, что $\overline{W}$ есть $\mathcal{M}_R$-идеал в $F_R(X)$. Если $[u(\overline{x}), v(\overline{x})] \in \overline{W}$, то в любой R-группе $G \in \mathcal{N}_R(W)$ и при любых $\overline{g} \in G^n$ имеем $[u(\overline{g}), v(\overline{g})] = e$, а значит, для любого $\alpha \in R$ имеем $(u(\overline{g}), v(\overline{g}))_\alpha = e$, т. е. $(u(\overline{g}), v(\overline{g}))_\alpha \in \overline{W}$, а это означает, что $\overline{W}$ — $\mathcal{M}_R$-идеал в $F_R(X)$. □

В каждом многообразии $\mathcal{N}_R(W)$ есть свободные относительно этого многообразия группы. Группа $F_{W,R}(X) \in \mathcal{N}_R(W)$ называется **свободной группой с базой X в многообразии $\mathcal{N}_R(W)$**, если $F_{W,R}(X)$ R-порождается множеством X и для любой группы $G \in \mathcal{N}_R(W)$ каждое отображение $\varphi_0\colon X \to G$ имеет единственное продолжение до R-гомоморфизма $\varphi\colon F_{W,R}(X) \to G$.

Теорема 2.1. *Свободной группой в многообразии R-групп $\mathcal{N}_R(W)$ является группа*

$$F_{W,R}(X) = F_R(X)/W_R(F_R(X)).$$

Доказательство. Ясно, что группа $G = F_R(X)/W_R(F_R(X))$ принадлежит $\mathcal{N}_R(W)$ и R-порождается множеством X. Пусть $H \in \mathcal{N}_R(W)$ и $\varphi_0 \colon X \to H$ — произвольное отображение. Так как $F_R(X)$ — свободная R-группа, φ_0 продолжается до R-гомоморфизма $\varphi_1 \colon F_R(X) \to H$. Ясно, что $W_R(F_R(X)) \subseteq \operatorname{Ker}\varphi_1$ (поскольку $H \in \mathcal{N}_R(W)$) и, значит, φ_1 индуцирует $\varphi \colon G \to H$, продолжающий φ_0:

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r] \arrow[dr, "\varphi_0"'] & F_R(X) \arrow[r] \arrow[d, "\varphi_1"] & G \arrow[dl, "\varphi"] \\
& H &
\end{tikzcd} \quad . \quad \square$$

Теорема 2.2 (Биркгоф)**.** *Класс R-групп $\mathcal{N}$ является R-многообразием тогда и только тогда, когда $\mathcal{N}$ замкнут относительно взятия R-подгрупп, декартовых R-произведений и R-гомоморфных образов.*

Доказательство этой теоремы дословно повторяет классическое доказательство (см. [12, 15.2.1]), только гомоморфизмы рассматриваются в категории $\mathcal{M}_R$. $\square$

3 Тензорные пополнения в многообразиях R-групп

Пусть $\mathcal{N}_R(W)$ — многообразие R-групп, заданное множеством слов W; $R \subseteq S$ — кольца; G — группа из $\mathcal{N}_R(W)$.

Определение 3.1. Пусть $G \in \mathcal{N}_R(W)$. Группу G_W^S будем называть тензорным S-пополнением G в многообразии $\mathcal{N}_S(W)$, если существует R-гомоморфизм $\lambda \colon G \to G_W^S$ такой, что $\lambda(G)$ S-порождает G_W^S, т. е. $\langle \lambda(G) \rangle_S = G_W^S$, и для любой группы H из $\mathcal{N}_S(W)$ и любого R-гомоморфизма $\varphi \colon G \to H$ существует S-гомоморфизм $\psi \colon G_W^S \to H$, замыкающий до коммутативной диаграмму:

$$
\begin{tikzcd}
G \arrow[r, "\lambda"] \arrow[dr, "\varphi"'] & G^S_W \arrow[d, dashed, "\exists\,\psi"] \\
& H
\end{tikzcd}
.
$$

Отметим, что в отличии от [2] мы рассматриваем только ситуацию, когда $\mu\colon R \to S$ — вложение колец, а потому μ не участвует в определении и обозначениях. Это ограничение не является существенным и сделано только ради упрощения обозначений.

Теорема 3.1. *Пусть $G \in \mathcal{N}_R(W)$. Тогда тензорное S-пополнение G^S_W относительно $\mathcal{N}_S(W)$ существует, причем*

$$G^S_W = G^S/W(G^S).$$

Доказательство. Мы отмечали выше, что существует тензорное пополнение G^S группы G в классе всех S-групп $\mathcal{M}_S$ и соответствующий R-гомоморфизм $\lambda\colon G \to G^S$ такой, что $\langle\lambda(G)\rangle_S = G^S$. Если $\eta\colon G^S \to G^S/W(G^S)$ — канонический эпиморфизм, то $\theta = \eta\lambda\colon G \to G^S/W(G^S)$ есть R-гомоморфизм, причем

$$\langle\theta(G)\rangle_S = G^S/W(G^S).$$

Осталось проверить универсальное свойство для $G^S/W(G^S)$. Пусть $\varphi\colon G \to H$ — произвольный R-гомоморфизм и $H \in \mathcal{N}_S(W)$. По определению G^S существует $\psi_0\colon G^S \to H$ такой, что $\varphi = \psi_0\lambda$. Так как $H \in \mathcal{N}_S(W)$, то $\psi_0(W(G^S)) = e$. Поэтому ψ_0 индуцирует искомый гомоморфизм $\psi\colon G^S/W(G^S) \to H$, для которого следующая диаграмма коммутативна

$$
\begin{tikzcd}
G \arrow[r, "\lambda"] \arrow[dr, "\varphi"'] & G^S \arrow[r] \arrow[d, "\exists\,\psi_0"] & G^S/W(G^S) \arrow[dl, "\exists\,\psi"] \\
& H &
\end{tikzcd}
.
$$

Следовательно,

$$G^S_W \cong G^S/W(G^S). \quad \square$$

Теорема 3.2. *Пусть* $R \subseteq S$ *— кольца,* $F_{W,R}(X)$ *— свободная группа в многообразии* $\mathcal{N}_R(W)$*. Тогда* $(F_{W,R}(X))^S_W$ *— свободная группа в многообразии* $\mathcal{N}_S(W)$*, т. е.*

$$(F_{W,R}(X))^S_W \cong F_{W,S}(X).$$

Доказательство. По теореме 3.1 $(F_{W,R}(X))^S_W \in \mathcal{N}_S(W)$. Пусть $H \in \mathcal{N}_S(W)$ и $\varphi_0 \colon X \to H$ — произвольное отображение. Тогда $H \in \mathcal{N}_R(W)$ и, значит, существует R-гомоморфизм $\varphi\colon F_{W,R}(X) \to H$ такой, что $\varphi_0 \subset \varphi$. Тогда по определению S-пополнения, найдётся S-гомоморфизм $\psi\colon (F_{W,R}(X))^S_W \to H$ и $\varphi \subset \psi$. Ясно, что ψ — искомый гомоморфизм, а значит, $(F_{W,R}(X))^S_W$ свободна в $\mathcal{N}_S(W)$. □

4 R-коммутант и абелевы многообразия R-групп

Определение 4.1. Пусть G — произвольная R-группа. R-подгруппа

$$(G,G)_R = \big\langle (g,h)_\alpha \mid\ g,h \in G,\ \alpha \in R \big\rangle_R.$$

называется R-коммутантом группы G.

Предложение 4.1. *Для любой R-группы G верны следующие утверждения:*

(a) *R-коммутант G является вербальной R-подгруппой, определяемой словом $[x,y] = x^{-1}y^{-1}xy$;*

(b) *R-коммутант — это наименьший $\mathcal{M}_R$-идеал, фактор-группа по которому абелева.*

Доказательство. (a). По определению (см. определение 2.2) любая вербальная подгруппа в категории $\mathcal{M}_R$, порождённая множеством R-слов W, определяется следующим образом: прежде всего вычисляются все значения слов из W в группе G, затем всеми значениями R-порождается подгруппа в G и, наконец, берётся R-идеальное замыкание полученной подгруппы. В нашем конкретном случае значениями слова $x^{-1}y^{-1}xy$ являются все обычные коммутаторы группы G.

Ясно, что R-идеал, порожденный множеством всех значений слова $[x, y]$, содержит $[G, G]$, и значит $(G, G)_R$. С другой стороны, по определению $(G, G)_R$ есть наименьший R-идеал, содержащий $[G, G]$. Таким образом, R-коммутант $(G, G)_R$ является вербальной R-подгруппой, порожденной словом $[x, y]$.

(b). Фактор-группа $G/(G, G)_R$ является абелевой степенной R-группой, а значит, R-модулем. Если N-любой $\mathcal{M}_R$-идеал такой, что G/N является R-модулем, то N содержит $[G, G]_R$, а потому и $(G, G)_R$. $\square$

Как уже отмечено, обычный коммутатор является (-1)-коммутатором. Какие ещё α-коммутаторы порождают R-коммутант как вербальную R-подгруппу? Ответим на этот вопрос в случае, когда R — поле.

Теорема 4.1. *Пусть R — поле. Тогда α-коммутатор $(x, y)_\alpha$ порождает R-коммутант как вербальную R-подгруппу при условии $\alpha \neq 0, 1$.*

Перед доказательством теоремы сформулируем и докажем

Предложение 4.2. *В любой степенной R-группе G для любых $g, f \in G$ и $\alpha, \beta \in R$ справедливы следующие тождества для α-коммутаторов:*

1) $[g^\alpha, f] = [g, f]^\alpha (g, [g, f])_\alpha$,

2) Если кольцо R коммутативно, то

$$(g, f)_\alpha^\beta \big(f^\alpha, (g, f)_\alpha\big)_\beta \big(g^\alpha, f^\alpha (g, f)_\alpha\big)_\beta = (g, f)_\beta^\alpha \big(f^\beta, (g, f)_\beta\big)_\alpha \big(g^\beta, f^\beta (g, f)_\beta\big)_\alpha.$$

Доказательство. Покажем, что равенство 1) следует из аксиомы $(f^{-1} g f)^\alpha = f^{-1} g^\alpha f$ для всех $f, g \in G$ и $\alpha \in R$. Перепишем, это равенство, учитывая, что

$$f^{-1} g^\alpha f = g^\alpha g^{-\alpha} f^{-1} g^\alpha f = g^\alpha [g^\alpha, f],$$
$$(f^{-1} g f)^\alpha = (g g^{-1} f^{-1} g f)^\alpha = (g[g, f])^\alpha = g^\alpha [g, f]^\alpha (g, [g, f])_\alpha.$$

Сокращая на g^α, получаем необходимый результат.

Докажем равенство 2). Положим $g = fh$. Тогда, в силу коммутативности кольца R, $(g^\alpha)^\beta = (g^\beta)^\alpha$.

Распишем это равенство подробнее:

$$
\begin{aligned}
((fh)^\alpha)^\beta &= \left(f^\alpha h^\alpha (f,h)_\alpha\right)^\beta = f^{\alpha\beta}(h^\alpha (f,h)_\alpha)^\beta (f^\alpha, h^\alpha (f,h)_\alpha)_\beta \\
&= f^{\alpha\beta} h^{\alpha\beta} (f,h)_\alpha^\beta (h^\alpha, (f,h)_\alpha)_\beta (f^\alpha, h^\alpha (f,h)_\alpha)_\beta. \\
((fh)^\beta)^\alpha &= \left(f^\beta h^\beta (f,h)_\beta\right)^\alpha = f^{\beta\alpha}(h^\beta (f,h)_\beta)^\alpha (f^\beta, h^\beta (f,h)_\beta)\alpha \\
&= f^{\beta\alpha} h^{\beta\alpha} (f,h)_\beta^\alpha (h^\beta, (f,h)_\beta)_\alpha (f^\beta, h^\beta (f,h)_\beta)_\alpha.
\end{aligned}
$$

Сокращая обе части на $f^{\alpha\beta} h^{\alpha\beta}$, получаем 2).

□

Доказательство теоремы 4.1. Рассмотрим α-коммутатор $(x, y)_\alpha$. Если $\alpha = 0, 1$, то $(x, y)_\alpha = e$ и такой α-коммутатор не может порождать R-коммутант. Предположим, что $\alpha \neq 0, 1$, и обозначим через H вербальную R-подгруппу, порождённую $(x, y)_\alpha$. Тогда ясно, что $H \subseteq (G, G)_R$, где $(G, G)_R$ есть R-коммутант группы G. В фактор-группе G/H тождество 2) принимает вид

$$(g^\alpha, f^\alpha)_\beta = (g, f)_\beta^\alpha \text{ для любого } \beta \in R.$$

Переписывая последнее тождество при $\beta = -1$, получаем

$$[f^{-\alpha}, g^{-\alpha}] = [f^{-1}, g^{-1}]^\alpha.$$

С другой стороны, тождество 1) влечет равенство $[g^\alpha, f] = [g, f]^\alpha$ в группе G/H, а поэтому $[g^\alpha, f^\alpha] = [f, g]^{\alpha^2}$ в G/H. Следовательно, в G/H имеем

$$[f^{-1}, g^{-1}]^{\alpha^2} = [g^{-\alpha}, f^{-\alpha}] = [f^{-1}, g^{-1}]^\alpha,$$

а значит

$$[f^{-1}, g^{-1}]^{\alpha^2 - \alpha} = e.$$

Так как R — поле, и $\alpha^2 - \alpha \neq 0$, получаем $[f^{-1}, g^{-1}] = e$ в G/H для всех $f, g \in G$. Следовательно, фактор-группа G/H является абелевой R-группой, а потому $H = (G, G)_R$. □

Опишем теперь абелевы многообразия степенных R-групп. Для этого прежде всего выясним структуру свободной абелевой степенной R-группы.

Теорема 4.2. *Свободная абелева R-группа с базой X является свободным R-модулем с базой X и R-изоморфна фактор-группе свободной R-группы с базой X по её R-коммутанту.*

Доказательство. Первая часть теоремы хорошо известна в теории модулей, так как произвольная абелева R-группа является R-модулем. Докажем, что

$$F_R(X)/\big(F_R(X), F_R(X)\big)_R$$

является свободным R-модулем с базисом X. По предложению 4.1 R-коммутант любой R-группы является вербальной R-подгруппой, определяемой словом $x^{-1}y^{-1}xy$, а потому, по теореме 2.1 фактор-группа $F_R(X)/(F_R(X), F_R(X))_R$ является свободной группой с базой X в многообразии групп, определяемых тождеством $x^{-1}y^{-1}xy = e$. Последнее многообразие является многообразием абелевых R-групп. □

В силу теоремы 4.2, описание многообразий абелевых степенных R-групп эквивалентно описанию всех вербальных R-подгрупп в свободном R-модуле. Заметим, что в абелевом случае вербальная R-подгруппа, порождённая множеством R-слов W, порождается как R-подгруппа значениями всех R-слов $w \in W$. Кроме того, можно считать, что любое слово в свободном R-модуле с базисом X имеет вид $x_1^{\alpha_1} \cdots x_k^{\alpha_k}$, где $x_i \in X$ и $\alpha_i \in R$.

Предложение 4.3. *Пусть $A_R(X)$ — свободная абелева R-группа с базисом X и H — вербальная R-подгруппа $A_R(X)$, порождённая множеством R-слов W. Тогда H порождается множеством R-слов $W_0 = \{x^{\alpha_i} \mid i \in I\}$ для некоторого подмножества $\{\alpha_i \in R \mid i \in I\}$ элементов из R и буквы x.*

Доказательство. Пусть $w \in W$ имеет вид $x_1^{\alpha_1} \cdots x_k^{\alpha_k}$. Заметим, что по следствию 1 вербальная R-подгруппа H инвариантна относительно всех эндоморфизмов из $A_R(X)$, в частности, эндоморфизмов $x_i \to x_i$ и $x_j \to e$ при $j \neq i$. Отсюда получаем, что каждый элемент $x_i^{\alpha_i}$ $(i = 1, \dots, k)$ принадлежит H. Ясно, что H такими элементами порождается. □

В дальнейшем будем предполагать, что любая вербальная R-подгруппа в свободном R-модуле $A_R(X)$ порождена некоторым множеством R-слов $W = \{x^{\alpha_i} \mid i \in I\}$, описанным выше. Поставим в соответствие множеству W двусторонний идеал $J_W = id\,(\alpha_i \mid i \in I)$ кольца R и соответственно R-подмодуль $A_R(X)^{J_W}$ модуля $A_R(X)$, порожденный всеми элементами вида g^α, где $g \in A_R(X)$ и $\alpha \in J_W$. Понятно, что $A_R(X)^{J_W}$ есть вербальная R-подгруппа $A_R(X)$. Как показывает следующее предложение, все вербальные подгруппы $A_R(X)$ имеют вид $A_R(X)^{J_W}$.

Предложение 4.4. *Пусть H — вербальная R-подгруппа свободной абелевой R-группы $A_R(X)$, порожденная множеством слов $W = \{x^{\alpha_i} \mid i \in I\}$. Тогда $H = A_R(X)^{J_W}$.*

Доказательство. Пусть δ — произвольный элемент из J_W. Тогда

$$\delta = \sum_{i=1}^{t} \beta_i \alpha_i \gamma_i,$$

где $\alpha_i \in I$ и β_i, γ_i — произвольные элементы кольца R. Пусть $g \in A_R(X)$, тогда $g^{\beta_i} \in A_R(X)$ и $(g^{\beta_i})^{\alpha_i} \in H$. Отсюда следует, что $g^{\beta_i \alpha_i \gamma_i} \in H$, и следовательно, $g^\delta \in H$. Поэтому $A_R(X)^{J_W} \subseteq H$. Включение $H \subseteq A_R(X)^{J_W}$ очевидно, а значит, $A_R(X)^{J_W} = H$. □

Теорема 4.3. *Существует взаимно-однозначное соответствие между решёткой двусторонних идеалов кольца R и решёткой вербальных R-подгрупп свободного R-модуля.*

Доказательство. Как следует из доказательства предложения 4.4, двусторонний идеал J_W не зависит от выбора слов W, определяющего вербальную подгруппу H, и однозначно определяется этой R-подгруппой. Верно и обратное: двустороннему идеалу J кольца R соответствует вербальная R-подгруппа $H = A_R(X)^J$. Нетрудно проверяется, что это соответствие взаимно-однозначное и оно сохраняет решёточные операции. □

Следствие. *При $R = \mathbb{Z}$ любое собственное подмногообразие абелевых групп есть многообразие абелевых групп периода $n \geq 2$.*

Доказательство. Это сразу следует из теоремы 4.3, так как любой идеал кольца $\mathbb{Z}$ имеет вид $n\mathbb{Z}$. □

Теорема 4.4. *Любое множество R-слов V в алфавите X эквивалентно множеству R-слов вида*

$$W = \left\{x_1^{\alpha_i},\ u_j \mid\ i \in I,\ j \in J\right\},$$

где u_j — слова из R-коммутанта группы $F_R(X)$.

Доказательство. Запишем каждое слово $w \in W$ в виде

$$w = x_{i_1}^{\alpha_1} \cdots x_{i_s}^{\alpha_s} u,$$

где все значки $i_1, \ldots, i_s$ различны, а u — элемент из R-коммутанта. Обозначим через S двусторонний идеал кольца R, порождённый элементами $\alpha_1, \ldots, \alpha_s$ по всем словам $w \in W$. Пусть $\{\alpha_i \mid\ i \in I\}$ — любое множество порождающих S как двустороннего идеала. Тогда это множество и слова вида u по всем W — искомые. □

5 Ряды R-коммутантов и разрешимые R-группы

Напомним, что в классе всех групп многообразие всех разрешимых групп ступени $\leq n$ аксиоматизируется тождеством $v_n(\bar{x}) = e$, где слова $v_n(\bar{x})$ определяются индуктивно:

$$v_n(x_1, \ldots, x_{2^n}) = [v_{n-1}(x_1, \ldots, x_{2^{n-1}}), v_{n-1}(x_{2^{n-1}+1}, \ldots, x_{2^n})],$$

здесь $v_0(x_1) = x_1$. В свою очередь, ряд коммутантов группы G

$$G = G^{(0)} \geq G^{(1)} \geq \ldots \geq G^{(n)} \geq \ldots \tag{5.1}$$

определяется по индукции равенством $G^{(n)} = [G^{(n-1)}, G^{(n-1)}]$. Легко видеть, что вербальная R-подгруппа R-группы G, порожденная словом $v_n(\bar{x})$, есть в точности R-идеал $G^{(n)}$, т. е.

$$v_{n,R}(G) = id_R(G^{(n)}).$$

Ряд R-подгрупп (5.1) естественным образом поднимается до ряда R-идеалов

$$G = G_0 \geq id_R(G^{(1)}) \geq \ldots \geq id_R(G^{(n)}) \geq \ldots \tag{5.2}$$

Как можно было ожидать, справедлив следующий результат, и его доказательство получается непосредственно из определений.

Предложение 5.1. *R-группа G является разрешимой ступени $\leq n$ тогда и только тогда, когда $id_R(G^{(n)}) = e$.*

Таким образом, казалось бы, идеалы $id_R(G^{(n)})$ дают естественный аналог ряда коммутантов (5.1). Однако заметим, что факторы ряда (5.1) абелевы, а верно ли это для ряда (5.2) — не известно. Известно только, что $G/id_R([G,G])$ является абелевой группой. Таким образом, в классе $\mathcal{M}_R$ возникает интересный вопрос.

Вопрос 5.1. Верно ли, что каждая разрешимая R-группа G обладает конечным рядом R-идеалов

$$G = H_0 \trianglerighteq_R H_1 \trianglerighteq_R \ldots \trianglerighteq_R H_n = e,$$

с абелевыми факторами H_i/H_{i+1}, $i = 0, \ldots n-1$?

Попытаемся слегка прояснить этот вопрос. В предыдущем параграфе было определено понятие R-коммутанта $(G,G)_R$ группы G из класса $\mathcal{M}_R$. Будем называть его первым R-коммутантом R-группы G и обозначать его через $G^{(1,R)}$. R-коммутант от $G^{(1,R)}$ будем называть вторым R-коммутантом и обозначать $G^{(2,R)}$ и т. д., $G^{(n+1,R)} = (G^{(n,R)}, G^{(n,R)})_R$. Возникает убывающий *ряд R-коммутантов* группы G

$$G = G^{(0,R)} \trianglerighteq_R G^{(1,R)} \trianglerighteq_R G^{(2,R)} \trianglerighteq_R \cdots \trianglerighteq_R G^{(n,R)} \trianglerighteq_R \cdots \tag{5.3}$$

с абелевыми факторами $G^{(i,R)}/G^{(i+1,R)}$, $i = 0, 1, \ldots$.

Индукцией по n нетрудно доказывается следующее утверждение.

Предложение 5.2. *Пусть G — R-группа. Тогда для любого натурального n*

$$id_R(G^{(n)}) \leq G^{(n,R)}, \tag{5.4}$$

причем равенства $id_R(G^{(n)}) = G^{(n,R)}$, $n \in \mathbb{N}$, имеют место тогда и только тогда когда все факторы ряда (5.2) *абелевы.*

Предложение 5.3. *Пусть G — R-группа. Если*

$$G = H_0 \trianglerighteq_R H_1 \trianglerighteq_R \ldots \trianglerighteq_R H_n = e$$

есть ряд R-идеалов с абелевыми факторами H_i/H_{i+1}, $i = 0, \ldots n-1$, то $H_i \geq G^{(i,R)}$ для всех $i = 0, \ldots, n$.

Доказательство. По построению $H_0 = G^{(0,R)}$. Предположим, что $H_i \geq G^{(i,R)}$ для некоторого натурального i. Поскольку фактор H_i/H_{i+1} абелев, по предложению 4.1 $H_{i+1} \geq (H_i, H_i)_R$. Напомним, что

$$(H_i, H_i)_R = \langle (g,h)_\alpha \mid g, h \in H_i, \alpha \in R \rangle_R.$$

Так как $H_i \geq G^{(i,R)}$ получаем, что

$$(H_i, H_i)_R \geq \langle (g,h)_\alpha \mid g, h \in G^{(i,R)}, \alpha \in R \rangle_R = (G^{(i,R)}, G^{(i,R)})_R = G^{(i+1,R)}.$$

Следовательно, $H_{i+1} \geq (H_i, H_i)_R \geq G^{(i+1,R)}$. Индукция завершает доказательство предложения. □

Из включения (5.4) следует, что если $G^{(n,R)} = e$, то G — разрешимая R-группа ступени разрешимости $\leq n$.

Определение 5.1. Степенную R-группу будем называть R-разрешимой, или верхне разрешимой, если $G^{(n,R)} = e$ для некоторого натурального n. В этом случае, наименьшее такое n называется ступенью верхней разрешимости G.

Понятно, что верхне разрешимая R-группа ступени разрешимости n является разрешимой R-группой ступени $\leq n$.

Предложение 5.4. *R-группа G является верхне разрешимой тогда и только тогда когда G обладает конечным рядом R-идеалов*

$$G = H_0 \trianglerighteq_R H_1 \trianglerighteq_R \ldots \trianglerighteq_R H_n = e$$

с абелевыми факторами H_i/H_{i+1}, $i = 0, \ldots n-1$.

Дискуссия выше естественно ведет к следующим открытым вопросам.

Вопрос 5.2. Верно ли, что $G^{(n,R)} = id\,(G^{(n)})$ для каждого натурального n?

Вопрос 5.3. Всякая ли разрешимая R-группа является верхне разрешимой? И если это так, то как соотносятся их ступени разрешимости?

Ряд R-коммутантов (5.3) можно продолжить до любого ординала α. Если α — непредельный ординал, то $G^{(\alpha,R)} = (G^{(\alpha-1,R)}, G^{(\alpha-1,R)})_R$. Если же α — предельный ординал, то

$$G^{(\alpha,R)} = \bigcap_{\beta<\alpha} G^{(\beta,R)}.$$

Вопрос 5.4. Пусть $F = F_R(X)$ — свободная R-группа с базой X. Для любого ли кольца R существует ординал α зависящий от R, такой, что $F^{(\alpha,R)} = e$?

6 Центральные ряды и нильпотентные R-группы

Напомним, что нижний центральный ряд группы G

$$G = \gamma_1 G \geq \gamma_2 G \geq \ldots \geq \gamma_n G \geq \ldots \tag{6.1}$$

определяется по индукции: $G = \gamma_1 G, \gamma_{n+1} G = [\gamma_n G, G]$. Наименьшее n такое, что $\gamma_n G \neq e$, но $\gamma_{n+1} G = e$, называется ступенью нильпотентости группы G. Ряд (6.1) — центральный, т. е. $[\gamma_n G, G] \leq \gamma_{n+1} G$ для любого n.

В категории R-групп желательно иметь не только нормальные R-подгруппы, но R-идеалы. Это ведет к следующему определению.

Определение 6.1. Пусть G — R-группа. Для натурального $n \in \mathbb{N}$ положим

$$\gamma_{n,R} G = id_R(\gamma_n G).$$

Предложение 6.1. *Пусть G — R-группа. Тогда выполнены следующие утверждения:*

1) *$id_R(\gamma_n G)$ — это вербальный идеал, порожденный лево-нормированным коммутатором $w_n = [x_1, \ldots, x_n]$, где $w_1 = x_1$, $w_{n+1} = [w_n, x_{n+1}]$.*

2) *$id_R(\gamma_n G)$ — это наименьший по включению R-идеал G, такой что группа $G/id_R(\gamma_n G)$ нильпотентна ступени $< n$.*

3) *G нильпотентна ступени $< n$ тогда и только тогда, когда $id_R(\gamma_n G) = e$.*

Таким образом, в группах G из класса $\mathcal{M}_R$ идеалы $id_R(\gamma_n G)$ наследуют многие свойства подгрупп $\gamma_n G$ в классе всех групп. Рассмотрим соответствующий ряд

$$G = id_R(\gamma_1 G) \geq id_R(\gamma_2 G) \geq \ldots \geq id_R(\gamma_n G) \geq \ldots \tag{6.2}$$

Возникает естественный вопрос.

Вопрос 6.1. Является ли ряд (6.2) центральным, т. е. верно ли, что $[id_R(\gamma_n G), G] \leq id_R(\gamma_{n+1} G)$ для каждого натурального n?

Чтобы лучше прояснить этот вопрос, введем нижний центральный ряд R-идеалов R-группы G.

Определение 6.2. Определим *нижний центральный ряд R-идеалов* R-группы G по индукции: $\gamma_{1,R} G = G$ и

$$\gamma_{n+1,R} G = id_R([\gamma_{n,R} G, G]).$$

Таким образом,

$$G = \gamma_{1,R} G \geq \gamma_{2,R} G \geq \ldots \geq \gamma_{n,R} G \geq \ldots. \tag{6.3}$$

По построению ряд (6.3) — центральный, что оправдывает его название.

Предложение 6.2. *Пусть G — R-группа. Тогда ряд* (6.2) *централен тогда и только тогда, когда $\gamma_{n,R} G = id_R(\gamma_n G)$ для каждого n. В этом случае ряды* (6.2) *и* (6.3) *совпадают.*

Доказательство. По предложению 6.3 для каждого натурального n $id_R(\gamma_n G) \leq \gamma_{n,R} G$. Предположим, что ряд (6.2) централен, то есть $[id_R(\gamma_n G), G] \leq id_R(\gamma_{n+1} G)$ для каждого натурального n. Докажем по индукции, что в этом случае $\gamma_{n,R} G = id_R(\gamma_n G)$ для каждого n. Заметим, что $\gamma_{1,R} G = id_R(\gamma_1 G)$ и предположим, что $\gamma_{n,R} G = id_R(\gamma_n G)$ для некоторого n. Тогда

$$\gamma_{n+1,R} G = id_R([\gamma_{n,R} G, G]) = id_R([id_R(\gamma_n G), G]) \leq id_R(\gamma_{n+1} G),$$

а значит $\gamma_{n+1,R} G = id_R(\gamma_{n+1} G)$. Таким образом ряды (6.2) и (6.3) совпадают. Обратное очевидно.

□

Нильпотентные R-группы, в которых $\gamma_{n,R} G = id_R(\gamma_n G)$ для каждого n, обладают многими свойствами, схожими с обычными нильпотентными группами, в частности, некоторые методы классической теории нильпотентных групп работают и в этих группах. В свази с этим определим некоторый «функтор» для групп из класса $\mathcal{M}_R$, «измеряющий» отклонение от классического случая.

Определение 6.3. Для группы $G \in \mathcal{M}_R$ и натурального n положим

$$M_n(G) = \gamma_{n,R} G / id_R(\gamma_n G).$$

Вопрос 6.2. Верно ли, что для свободных, свободных разрешимых и свободных нильпотентных R-групп G $M_n(G) = e$ для каждого n?

Вопрос 6.3. Существует ли R-группа G, для которой $M_n(G) \neq e$ для некоторого n? Это сводится к вопросу, существует ли нильпотентная R-группа G, для которой $M_n(G) \neq e$ для некоторого n?

Классический нижний центральный ряд группы G можно продолжить до любого ординала α, получая $\gamma_\alpha G$. Точно так же ряды (6.2) и (6.3) можно продолжить для любого ординала α. А именно, ряд (6.2) определяется как $id_R(\gamma_\alpha G)$. Для ряда (6.3) нужно рассмотреть два случая: если

α — непредельный ординал, то $\gamma_{\alpha,R}G = id_R([\gamma_{\alpha-1,R}G, G])$; если же α — предельный ординал, то

$$\gamma_{\alpha,R}G = \bigcap_{\beta<\alpha} \gamma_{\beta,R}G.$$

Вопрос 6.4. Пусть $F = F_R(X)$ — свободная R-группа с базой X. Для любого ли кольца R существует ординал β такой, что

1) $id_R(\gamma_\beta F) = e$?

2) $\gamma_{\beta,R}F = e$?

Еще более загадочным является следующее обобщение классического нижнего центрального ряда на R-группы G. Для этого индукцией по n определим понятие простого $\overline{\alpha}$-коммутатора веса n, где $\overline{\alpha} = (\alpha_1, \dots, \alpha_{n-1})$, $\alpha_i \in R$. При $n = 1$ полагаем, что простые $\overline{\alpha}$-коммутаторы веса 1 — это в точности все элементы из G. Если $n = 2$, то $\overline{\alpha} = (\alpha_1)$ и в этом случае простой $\overline{\alpha}$-коммутатор — это α_1-коммутатор $(g_1, g_2)_{\alpha_1}$ произвольных элементов g_1, g_2 из G, определенный выше. Пусть для $n \geq 2$ простые $\overline{\alpha}$-коммутаторы веса n уже определены. Тогда простой $(\overline{\alpha}, \alpha_n)$-коммутатор веса $n+1$ (здесь $\alpha_n \in R$) есть α_n-коммутатор $(g, g_n)_{\alpha_n}$, где g есть простой $\overline{\alpha}$-коммутатор веса n.

Далее, пусть $X = \{x_1, x_2, \dots\}$ — множество букв. Обозначим через

$$W_n = \Big\{ \big(\cdots ((x_1, x_2)_{\alpha_1}, x_3)_{\alpha_2}, \dots, x_n \big)_{\alpha_n} \mid \alpha_1, \dots, \alpha_{n-1} \in R \Big\}$$

множество всех простых $\overline{\alpha}$-коммутаторов веса $n+1$ от букв $x_1, \dots, x_n$, где $\overline{\alpha} = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$.

Определение 6.4. Вербальную R-подгруппу R-группы G, порождённую множеством слов W_n, будем обозначать через $\widetilde{\gamma}_{n,R}(G)$. Таким образом, $\widetilde{\gamma}_{n,R}(G)$ есть R-идеал, порожденный всеми простыми $\overline{\alpha}$-коммутаторами веса n.

Предложение 6.3. *Для любой R-группы G и любого натурального n справедливы следующие включения*

$$\gamma_{n,R}G \geq \widetilde{\gamma}_{n,R}(G) \geq id_R(\gamma_n G).$$

Доказательство. Обозначим через $Com_{R,n}(G)$ множество всех простых $\overline{\alpha}$-коммутаторов веса n в G. Поскольку каждый обычный простой коммутатор $[g_1, g_2, \ldots, g_n]$ веса n является также $\overline{\alpha}$-коммутатором веса n при надлежащем выборе $\overline{\alpha}$, то $\widetilde{\gamma}_{n,R}(G)$ содержит все обычные простые коммутаторы из G веса n, а значит, $\widetilde{\gamma}_{n,R}(G) \geq id_R(\gamma_n G)$.

Теперь докажем по индукции, что $\gamma_{n,R}G \geq \widetilde{\gamma}_{n,R}(G)$. Для $n = 1$ $\gamma_{n,R}G = G = \widetilde{\gamma}_{n,R}(G)$. Допустим по индукции, что $\gamma_{n,R}G \geq \widetilde{\gamma}_{n,R}(G)$. Тогда $[\gamma_{n,R}G, G]$ содержит все обычные коммутаторы вида $[g, g_{n+1}]$, где $g \in Com_{R,n}(G)$. Поэтому R-идеал $\gamma_{n+1,R}G = id_R([\gamma_{n,R}G, G])$ содержит все α_{n+1}-коммутаторы $(g, g_{n+1})_{\alpha_{n+1}}$ веса 2. Поскольку все такие коммутаторы дают, в точности, все $\overline{\alpha}$-коммутаторы веса $n+1$, то $\gamma_{n+1,R}G$ содержит $Com_{R,n+1}(G)$, а значит, и весь идеал $\widetilde{\gamma}_{n,R}(G)$. Это завершает доказательство предложения. $\square$

Обозначим через $\underline{\mathfrak{N}}_{n,R}$, $\widetilde{\mathfrak{N}}_{n,R}$, $\overline{\mathfrak{N}}_{n,R}$ соответственно классы R-групп G, где $\gamma_{n,R}G = e$, $\widetilde{\gamma}_{n,R}(G) = e$, $id_R(\gamma_n G) = e$. Тогда из предложения 6.3 получаем включения

$$\underline{\mathfrak{N}}_{n,R} \subseteq \mathfrak{N}_{n,R} \subseteq \overline{\mathfrak{N}}_{n,R}.$$

Как мы видели раньше, $\gamma_{2,R}G = id_R(\gamma_2 G)$, поэтому

$$\underline{\mathfrak{N}}_{2,R} = \mathfrak{N}_{2,R} = \overline{\mathfrak{N}}_{2,R}.$$

Вопрос о совпадении этих классов для $n > 2$ остается открытым и зависит от решения вопроса 6.3.

В [2] отмечено, что тензорные пополнения абелевых R-групп являются абелевыми R-группами. В общем случае тензорное пополнение в категории всех степенных R-групп строится с помощью свободных конструкций (см. [4]), а потому, как правило, в некоммутативном случае содержит свободные подгруппы. Тем не менее справедлива

Теорема 6.1. *Если G — нильпотентная R-группа ступени нильпотентности 2, то её тензорное пополнение G^S также является нильпотентной S-группой ступени 2.*

Доказательство. Обозначим R-центр группы G через Z. Так как ступень нильпотентности G равна 2, то R-коммутант $\gamma_1(G) \subseteq Z$. Непосредственная проверка показывает, что Z^S — центральная подгруппа группы G^S. Покажем, что $\gamma_1(G^S) \subseteq Z^S$. Так как G^S порождается $\langle \lambda(G) \rangle_S$ (здесь $\lambda \colon G \to G^S$ — канонический гомоморфизм из определения S-пополнения) и так как обычный коммутант содержится в центре, то нетрудно проверить с помощью коммутаторных соотношений [13, с. 171], что обычный коммутант группы G^S принадлежит Z^S. Далее тождество (4.2) из предложения 4.2 показывает, что в этом случае $[x^\alpha, y] = [x, y]^\alpha$. Проверим, что α-коммутатор $(x, y)_\alpha$ лежит в центре G^S:

$$\begin{aligned}\big[(x,y)_\alpha, z\big] &= \big[y^{-\alpha}x^{-\alpha}(xy)^\alpha, z\big] = [y^{-\alpha}, z]\,[x^{-\alpha}, z]\,\big[(xy)^\alpha, z\big] = \\ &= [y,z]^{-\alpha}[x,z]^{-\alpha}[xy,z]^\alpha = [y,z]^{-\alpha}[x,z]^{-\alpha}[x,z]^\alpha[y,z]^\alpha = e. \quad \square\end{aligned}$$

Список литературы

[1] R. C. Lyndon, Groups with parametric exponents. *Trans. Amer. Math. Soc.* **96** (1960), 518–533.

[2] А. Г. Мясников, В. Н. Ремесленников, Степенные группы. I. Основы теории и тензорные пополнения. *Сиб. мат. журн.* **35** (1994), № 5, 1106–1118.

[3] М. Г. Амаглобели, В. Н. Ремесленников, Свободные 2-ступенно нильпотентные R-группы. *Докл. АН* **443** (2012), № 4, 410–413.

[4] М. Г. Амаглобели, Функтор тензорного пополнения в категориях степенных MR-групп. *Алгебра логика* **57** (2018), № 2, 137–148.

[5] A. G. Myasnikov, V. N. Remeslennikov, Exponential groups. II. Extensions of centralizers and tensor completion of CSA-groups. *Internat. J. Algebra Comput.* **6** (1996), no. 6, 687–711.

[6] G. Baumslag, A. Myasnikov, V. Remeslennikov, Discriminating completions of hyperbolic groups. Dedicated to John Stallings on the occasion of his 65th birthday. *Geom. Dedicata* **92** (2002), 115–143.

[7] М. Г. Амаглобели, В. Н. Ремесленников, Расширения централизаторов в нильпотентных группах. *Сиб. мат. Журн.* **54** (2013), № 1, 8–19.

[8] M. Amaglobeli, V. Remeslennikov, Algorithmic problems for class-2 nilpotents *MR*-groups. *Georgian Math. J.* **22** (2015), no. 4, 441–449.

[9] М. Г. Амаглобели, Многообразия степенных *MR*-групп. *Докл. АН* **490** (2020), № 1, 1–4.

[10] G. Baumslag, Free abelian X-groups. *Illinois J. Math.* **30** (1986), no. 2, 235–245.

[11] В. А. Горбунов, *Алгебраическая теория квазимногообразий.* Научная книга, Новосибирск, 1999.

[12] М. И. Каргаполов, Ю. И. Мерзляков, *Основы теории групп.* СПб, Лань, 2009.

[13] М. Холл. *Теория групп.* ИЛ, Москва, 1962.

Адреса авторов:

Амаглобели Михаил Георгиевич

Тбилисский государственный университет им. Ив. Джавахишвили, пр. Чавчавадзе 1, Тбилиси 0128, Грузия

E-mail: mikheil.amaglobeli@tsu.ge

Мясников Алексей Георгиевич

Schaefer School of Engineering & Science, Department of Mathematic Sciences, Stevens Institute of Technology, Castle Point on Hudson, Hoboken NJ 07030-5991, USA.

E-mail: amiasnikov@gmail.com

Надирадзе Теона Тенгизовна

Тбилисский государственный университет им. Ив. Джавахишвили, пр. Чавчавадзе 1, Тбилиси 0128, Грузия

E-mail: teonanadiradze1997@gmail.com

Р Е Ф Е Р А Т

УДК 512.544.33

М. Г. Амаглобели, А. Г. Мясников, Т. Т. Надирадзе. Многообразия степенных R-групп

Понятие степенной R-группы, где R — произвольное ассоциативное кольцо с единицей введено Р. Линдоном. А. Г. Мясников и В. Н. Ремесленников уточнили понятие R-группы, введя дополнительную аксиому. В частности, новое понятие степенной MR-группы (R-кольцо) является непосредственным обобщением понятие R-модуля на случай некоммутативных групп. В данной работе вводится понятие многообразия MR-групп и тензорного пополнения в многообразии. Описаны абелевы многообразия MR-групп и проведено сравнение различных определений нильпотентности в этой категории. Получено, что пополнение 2-ступенно нильпотентной MR-группы является 2-ступенно нильпотентной.

Ключевые слова: линдонова R-группа, MR-группа, многообразие MR-групп, α-коммутатор, R-коммутант, нильпотентная MR-группа, тензорное пополнение.

A B S T R A C T

UDC 512.544.33

M. G. Amaglobeli, A. G. Myasnikov, T. T. Nadiradze. Varieties of exponential R-groups

In this paper we introduce the notion of a variety of exponential MR-groups and tensor completions of groups in varieties. We study relationships between free groups of a given variety under different rings of scalars and describe varieties of abelian MR-groups. Moreover, in the category of MR-groups, we consider several analogs of n-class nilpotent groups. We got that the completion of a 2-class nilpotent group is a 2-class nilpotent.

Keyword: Lyndon's R-groups, MR-groups, varieties of MR-groups, α-commutator, R-commutant, tensor completion, nilpotent MR-group.