

ივანე ჯავახიშვილის სახელობის თბილისის სახელმწიფო უნივერსიტეტი



მათემატიკის სადოქტორო პროგრამა

სამეცნიერო კვლევითი პროექტი 1

ირაკლი სიხარულიძე

**დოლბოს თეორემა ფსევდოანალიზურ დიფერენციალურ
ფორმათა კონისათვის, ერმიტული სტრუქტურა ჰოლომორფულ
წრფეთა ფიბრაციაზე განსაზღვრული ფსევდოანალიზური
ფუნქციების საშუალებით**

ხელმძღვანელი - გია გიორგაძე, ფიზიკა-მათემატიკურ მეცნიერებათა
დოქტორი, ასოცირებული პროფესორი, ივანე ჯავახიშვილის სახელობის თბილისის
სახელმწიფო უნივერსიტეტის ზუსტ და საბუნებისმეტყველო მეცნიერებათა
ფაკულტეტი

ზუსტ და საბუნებისმეტყველო მეცნიერებათა ფაკულტეტი,
მათემატიკის დეპარტამენტი

2024 წელი, თბილისი

სარჩევი

ანოტაცია.....	2
Abstract	3
შესავალი.....	4
(p, q) -ტიპის დიფერენციალურ ფორმათა კონა;	5
ფსევდოანალიზურ დიფერენციალურ ფორმათა კონა.....	6
დოლბოს თეორემა ფსევდოანალიზურ დიფერენციალურ ფორმათა კონისათვის.....	9
ფსევდოანალიზურ E -მნიშვნელობიან დიფერენციალურ ფორმათა კონა	13
ერმიტული ბმულობა.....	16
ფსევდოანალიზურ ფუნქციათა განაწილებით მოცემული ერმიტული სტრუქტურა, რომლის მიმართაც მოცემული ბმულობა ერმიტულია	18
ბიბლიოგრაფია.....	23

ანოტაცია

მოყვანილია ერთ-ერთი გზა ჰოლომორფულ დიფერენციალურ ფორმათა კონის განზოგადოებისა ისეთი, რომ მიღებული ფორმების კომპონენტ ფუნქციები ლოკალური კოორდინატული სისტემით ინდუცირებული საბაზისო კვეთების მიმართ აკმაყოფილებდნენ კარლემან-ბერს-ვეკუას განტოლებას თვითოეული არგუმენტის მიმართ, ანუ, იყვნენ ფსევდოანალიზური ფუნქციები ბერს-ვეკუას აზრით; ამ კონისთვის დასმულია საკითხი დოლბოს თეორემის ანალოგის სამართლიანობის შესახებ, მოყვანილია აუცილებელი და საკმარისი პირობა იმისა, რომ იმ კონათა ჰომომორფიზმთა, რომლების ბირთვებიც მოცემული კონებია, მიმდევრობა ადგენდეს კომპლექსს და დოლბოს თეორემის სამართლიანობა დაყვანილია წრფივ კერძოწარმოებულებიან დიფერენციალურ განტოლებათა სისტემის ამონახსნის არსებობაზე; მეორე ნაწილში მოყვანილია თუ როგორ შეიძლება განისაზღვროს ბმულობიან ჰოლომორფულ წრფეთა ფიბრაციაზე ერმიტული სტრუქტურა სათანადოდ შერჩეული ფსევდოანალიზური ფუნქციების მეშვეობით, როგორ განსაზღვრული ერმიტული სტრუქტურის მიმართაც ბმულობა ერმიტული იქნებოდა.

Abstract

A generalization of the sheaf of holomorphic functions is introduced such that the component functions of so defined differential forms with respect to the basis induced by a local coordinate system satisfy Carleman-Bers-Vekua equations in each argument and so are pseudoanalytic functions; The question of whether the analogue of the Dolbeaut theorem holds for this sheaf is considered, the necessary and sufficient conditions for the sequence of sheaf homomorphisms whose kernels are the above-mentioned sheaves to constitute a complex are given and the question is reduced to the existence of a solution to a system of linear partial differential equations; in the second part a way of defining an Hermitian structure for a holomorphic line bundle equipped with a connection compatible with the complex structure is given such that the connection is Hermitian with respect to the so defined Hermitian structure.

შესავალი

ჰოლომორფულობის ცნება, გამომდინარე იქიდან, რომ მისთვის რამოდენიმე ტოლფასი პირობა არსებობს, შესაძლებელია სხვადასხვა მიმართულებებით განზოგადდეს, ერთ-ერთი რომელი მიმართულებებიდანაც არის კოში-რიმანის განტოლებათა სისტემის არაერთგვაროვნით შეცვლა, კერძოდ, კარლემან-ბერს-ვეკუას განტოლებათა სისტემის ამონახსნთა განხილვა, რომლებსაც ფსევდოანალიზური ფუნქციები ეწოდება [1]; ამ გვარის ფუნქციებს მრავალი მსგავსი თვისება გააჩნია ჰოლომორფული ფუნქციებისა; აქ მოყვანილია ერთ-ერთი გზა, თუ როგორ შეიძლება განზოგადდეს ჰოლომორფული დიფერენციალური ფორმის ცნება ისე, რომ მიღებული ტიპის ფორმების კომპონენტ ფუნქციები ლოკალური კოორდინატული სისტემით ინდუცირებული საბაზისო კვეთების მიმართ იყვნენ ფსევდოანალიზური ბერს-ვეკუას აზრით თვითოეული კომპონენტის მიმართ, ასევე მოყვანილია, ანალოგიურად ჰოლომორფული შემთხვევისა, კონათა ჰომომორფიზმი, რომლის ბირთვიც ამგვარად განსაზრვული ფსევდოანალიზური დიფერენციალური ფორმების კონაა და აუცილებელი და საკმარისი პირობა იმისა, რომ ამ ჰომომორფიზმთა მიმდევრობა ადგენდეს კომპლექსს, რის შემდეგაც დასმულია საკითხი დოლბოს თეორემის ანალოგის სამართლიანობის შესახებ; ეს თეორემა მნიშვნელოვანია იმიტომ, რომ ამყარებს იზომორფიზმს კონათა კოჰოლომოგიის ჯგუფებსა და დოლბოს კოჰომოლოგიის ჯგუფებს შორის, რომელთაგანაც პირველნი ნაკლებად ხელშესახები და რთულად დათვლადი ობიექტებია, მაშინ როდესაც დოლბოს კოჰომოლოგიის ჯგუფის ელემენტები კონკრეტული დიფერენციალური ფორმების ექვივალენტობათა კლასებია; ამ თეორემის სამართლიანობა დაყვანილია წრფივ კერძოწარმოებულებიან დიფერენციალურ განტოლებათა სისტემის ამონახსნის არსებობაზე, როგორი სისტემის მსგავსი სისტემების გამოკვლევასაც ეძღვნება რამოდენიმე ნაშრომი; დასმულია ანალოგიური საკითხი ფსევდოანალიზურ დიფერენციალურ ფორმათა კონისათვის მნიშვნელობებით ჰოლომორფულ ვექტორულ ფიბრაციაში.

მეორე ნაწილში მოყვანილია თუ როგორ შეიძლება სათანადოდ შერჩეული ფსევდოანალიზური ფუნქციების მეშვეობით ჰოლომორფულ წრფეთა ფიბრაციაზე ბმულობით თავსებადით ჰოლომორფულ სტრუქტურასთან განისაზღვროს ერმიტული სტრუქტურა ისე, რომ მის მიმართ ბმულობა ერმიტული იყოს.

(p, q) -ტიპის დიფერენციალურ ფორმათა კონა

$\mathcal{A}_X^{p,q}$ -ით აღინიშნება X მრავალსახეობაზე გლუვ (p, q) -ტიპის დიფერენციალურ ფორმათა კონა [2, 3], ანუ ფიბრაციის

$$\bigwedge^{p,q} X := \bigwedge^p (T^{1,0} X)^* \otimes \bigwedge^q (T^{0,1} X)^* \rightarrow X,$$

გლუვი კვეთების კონა, სადაც $T^{1,0} X$ და $T^{0,1} X$ ქვემდებარე გლუვი მრავალსახეობის მხეზი ფიბრაციის TX კომპლექსიფიკაციის $T_{\mathbb{C}} X := TX \otimes \mathbb{C}$ საკუთრივი ქვეფიბრაციებია $\pm i$ საკუთრივი მნიშვნელობებისათვის კომპლექსური სტრუქტურის შესაბამისი ფიბრაციის ენდომორფიზმისა

$$J: TX \rightarrow TX, \quad \left(P, \sum_{j=1}^n X_j \frac{\partial}{\partial x_j} + \sum_{k=1}^n Y_k \frac{\partial}{\partial y_k} \right) \mapsto \left(P, \sum_{j=1}^n X_j \frac{\partial}{\partial y_j} + \sum_{k=1}^n (-Y_k) \frac{\partial}{\partial x_k} \right),$$

სადაც

$$\sum_{j=1}^n X_j \frac{\partial}{\partial x_j} + \sum_{k=1}^n Y_k \frac{\partial}{\partial y_k} \in T_p X$$

მხეზი ვექტორი წარმოდგენილია ლოკალური კოორდინატული სისტემის მიმართ; ამ ასახვის განსაზღვრების კორექტულობას განაპირობებს კოორდინატული გადასვლის ფუნქციების ჰოლომორფულობა, ანუ განიხილება

$$J_{\mathbb{C}}: TX \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C} \rightarrow TX \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$$

ასახვის $\pm i$ საკუთრივი მნიშვნელობის შესაბამისი საკუთრივი ქვეფიბრაციები და

$$T_{\mathbb{C}} X := TX \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C} = T^{1,0} X \oplus T^{0,1} X.$$

სამართლიანია წარმოდგენა:

$$\bigwedge^k (T_{\mathbb{C}} X)^* = \bigoplus_{p+q=k} \bigwedge^{p,q} X$$

და ასევე კვეთებისათვის:

$$\Gamma \left(U, \bigwedge^k (T_{\mathbb{C}} X)^* \right) = \Gamma \left(U, \bigoplus_{p+q=k} \bigwedge^{p,q} X \right),$$

სადაც $U \subseteq X$ ღია ქვესიმრავლეა.

ფსევდოანალიზურ დიფერენციალურ ფორმათა კონა

განსაზღვრება. $\omega \in \mathcal{A}_X^{p,0}(U)$ გლუვ ფორმას X კომპლექსური მრავალსახეობის ღია ქვესიმრავლეზე $U \subseteq X$ ეწოდება *ფსევდოანალიზური p -ფორმა* $\alpha \in \mathcal{A}_X^{0,1}(U)$ -ის მიმართ, ან, α -ფსევდოანალიზური p -ფორმა, თუ

$$\bar{\partial}\omega = \alpha \wedge \omega.$$

განსაზღვრება. $\alpha \in \Gamma(X, \mathcal{A}_X^{0,1})$ გლობალური ფორმის მიმართ შესაბამეხას X კომპლექსური მრავალსახეობის ყოველი ღია ქვესიმრავლისთვის $U \subseteq X, U \in \text{Open}(X)$ სიმრავლისა $\Psi_{X,\alpha}^p(U)$

$$U \mapsto \Psi_{X,\alpha}^p(U) \equiv \Gamma(U, \Psi_{X,\alpha}^p),$$

სადაც

$$\Psi_{X,\alpha}^p(U) \equiv \Gamma(U, \Psi_{X,\alpha}^p) := \{\omega \in \mathcal{A}_X^{p,0}(U) | \bar{\partial}\omega = \alpha|_U \wedge \omega\},$$

ხოლო ყოველი ჩართვისთვის $U \subseteq V$ კი შეზღუდვის ჰომომორფიზმისა

$$\Psi_{X,\alpha}^p(V) \rightarrow \Psi_{X,\alpha}^p(U), \quad \omega \mapsto \omega|_U$$

ეწოდება α -ფსევდოანალიზურ დიფერენციალურ p -ფორმათა კონა X -ზე.

დებულება. $\Psi_{X,\alpha}^p$ კონა X კომპლექსურ მრავალსახეობაზე $\mathcal{O}_X$ -მოდულთა კონაა, სადაც $\mathcal{O}_X$ -ით აღნიშნულია X -ზე ჰოლომორფულ ფუნქციათა რგოლთა კონა, ან, სტრუქტურული კონა.

დამტკიცება. $U \subseteq X$ ღია სიმრავლისათვის განვიხილოთ კვეთები $f, g \in \mathcal{O}_X(U)$ და $\zeta, \eta \in \Psi_{X,\alpha}^p(U)$; $f\zeta + g\eta \in \mathcal{A}_X^{p,0}(U)$ -ისთვის

$$\bar{\partial}(f\zeta + g\eta) = f\bar{\partial}\zeta + g\bar{\partial}\eta = f\alpha \wedge \zeta + g\alpha \wedge \eta = \alpha \wedge (f\zeta) + \alpha \wedge (g\eta) = \alpha \wedge (f\zeta + g\eta);$$

მაშასადამე, $f\zeta + g\eta \in \Psi_{X,\alpha}^p(U)$, ანუ $\Psi_{X,\alpha}^p(U)$ მოდულია $\mathcal{O}_X(U)$ რგოლის მიმართ, რაც ნიშნავს, რომ $\Psi_{X,\alpha}^p$ არის $\mathcal{O}_X$ -მოდულთა კონა.

□

განსაზღვრება. კონათა ჰომომორფიზმი $\alpha \in \Gamma(X, \mathcal{A}_X^{0,1})$ -ის მიმართ

$$\bar{\partial}_\alpha: \mathcal{A}_X^{p,q} \rightarrow \mathcal{A}_X^{p,q+1}$$

განსაზღვრება შემდეგნაირად: ყოველი ღია ქვესიმრავლისათვის $U \subseteq X$

$$\bar{\partial}_\alpha^U \equiv \bar{\partial}_\alpha: \mathcal{A}_X^{p,q}(U) \rightarrow \mathcal{A}_X^{p,q+1}(U), \quad \omega \mapsto \bar{\partial}_\alpha \omega := \bar{\partial}\omega - \alpha|_U \wedge \omega.$$

ის მართლაც მოდულთა კონათა ჰომომორფიზმია, რადგან, კვეთებისათვის $f, g \in \mathcal{O}_X(U)$ და $\zeta, \eta \in \mathcal{A}_X^{p,q}(U)$,

$$\begin{aligned}\bar{\partial}_\alpha(f\zeta + g\eta) &= \bar{\partial}(f\zeta + g\eta) - \alpha \wedge (f\zeta + g\eta) = f(\bar{\partial}\zeta - \alpha \wedge \zeta) + g(\bar{\partial}\eta - \alpha \wedge \eta) \\ &= f\bar{\partial}_\alpha\zeta + g\bar{\partial}_\alpha\eta.\end{aligned}$$

შენიშვნა. α -ფსევდოანალიზურ p -დიფერენციალურ ფორმათა კონა

$$\bar{\partial}_\alpha: \mathcal{A}_X^{p,0} \rightarrow \mathcal{A}_X^{p,1}$$

კონათა ჰომომორფიზმის ბირთვია

$$\Psi_{X,\alpha}^p = \ker(\bar{\partial}_\alpha: \mathcal{A}_X^{p,0} \rightarrow \mathcal{A}_X^{p,1}).$$

ლოკალური კოორდინატული სისტემის მიმართ $\varphi: U \rightarrow \varphi(U) \subseteq \mathbb{C}^n$

კოორდინატული ფუნქციებით $z_j: U \rightarrow \mathbb{C}$

$$\bar{\partial}_\alpha: \mathcal{A}_X^{p,q}(U) \rightarrow \mathcal{A}_X^{p,q+1}(U),$$

ჰომომორფიზმის მოქმედება $\omega \in \mathcal{A}_X^{p,q}(U)$ ფორმაზე წარმოადგენით

$$\omega = \sum_{\substack{1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_p \leq n \\ 1 \leq j_1 < j_2 < \dots < j_q \leq n}} f_{i_1 \dots i_p j_1 \dots j_q} dz_{i_1} \wedge \dots \wedge dz_{i_p} \wedge d\bar{z}_{j_1} \wedge \dots \wedge d\bar{z}_{j_q}$$

ჩაიწერება შემდეგი სახით:

$$\begin{aligned}
\bar{\partial}_\alpha(\omega) &= \sum_{\substack{1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_p \leq n \\ 1 \leq j_1 < j_2 < \dots < j_q \leq n}} \left(\sum_{k=1}^n \frac{\partial f_{i_1 \dots i_p j_1 \dots j_q}}{\partial \bar{z}_k} d\bar{z}_k \wedge \right) dz_{i_1} \wedge \dots \wedge dz_{i_p} \wedge d\bar{z}_{j_1} \wedge \dots \wedge d\bar{z}_{j_q} \\
&\quad - \left(\sum_{k=1}^n a_k d\bar{z}_k \right) \wedge \left(\sum_{\substack{1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_p \leq n \\ 1 \leq j_1 < j_2 < \dots < j_q \leq n}} f_{i_1 \dots i_p j_1 \dots j_q} dz_{i_1} \wedge \dots \wedge dz_{i_p} \wedge d\bar{z}_{j_1} \wedge \dots \wedge d\bar{z}_{j_q} \right) \\
&= \sum_{\substack{1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_p \leq n \\ 1 \leq j_1 < j_2 < \dots < j_q \leq n \\ 1 \leq k \leq n}} \frac{\partial f_{i_1 \dots i_p j_1 \dots j_q}}{\partial \bar{z}_k} d\bar{z}_k \wedge dz_{i_1} \wedge \dots \wedge dz_{i_p} \wedge d\bar{z}_{j_1} \wedge \dots \wedge d\bar{z}_{j_q} \\
&\quad - \sum_{\substack{1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_p \leq n \\ 1 \leq j_1 < j_2 < \dots < j_q \leq n \\ 1 \leq k \leq n}} a_k f_{i_1 \dots i_p j_1 \dots j_q} d\bar{z}_k \wedge dz_{i_1} \wedge \dots \wedge dz_{i_p} \wedge d\bar{z}_{j_1} \wedge \dots \wedge d\bar{z}_{j_q} \\
&= \sum_{\substack{1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_p \leq n \\ 1 \leq j_1 < j_2 < \dots < j_q \leq n \\ 1 \leq k \leq n}} \left(\frac{\partial f_{i_1 \dots i_p j_1 \dots j_q}}{\partial \bar{z}_k} - a_k f_{i_1 \dots i_p j_1 \dots j_q} \right) d\bar{z}_k \wedge dz_{i_1} \wedge \dots \wedge dz_{i_p} \wedge d\bar{z}_{j_1} \\
&\quad \wedge \dots \wedge d\bar{z}_{j_q} \\
&= \sum_{\substack{1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_p \leq n \\ 1 \leq j_1 < j_2 < \dots < j_q \leq n \\ k \notin \{j_1, \dots, j_q\}}} \left(\frac{\partial f_{i_1 \dots i_p j_1 \dots j_q}}{\partial \bar{z}_k} - a_k f_{i_1 \dots i_p j_1 \dots j_q} \right) d\bar{z}_k \wedge dz_{i_1} \wedge \dots \wedge dz_{i_p} \wedge d\bar{z}_{j_1} \\
&\quad \wedge \dots \wedge d\bar{z}_{j_q},
\end{aligned}$$

სათანადო გადაჯგუფებებითა და ანტისიმეტრიულობის გათვალისწინებით გვექნება

$$\begin{aligned}
\bar{\partial}_\alpha(\omega) &= \sum_{\substack{1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_p \leq n \\ 1 \leq j_1 < j_2 < \dots < j_q < j_{q+1} \leq n}} \left(\sum_{\{k\} \cup \{j'_1, \dots, j'_q\} = \{j_1, \dots, j_q, j_{q+1}\}} (-1)^{p + \text{sgn} \left(\sigma_{j_1, \dots, j_q, j_{q+1}}^{k, j'_1, \dots, j'_q} \right)} \left(\frac{\partial f_{i_1 \dots i_p j'_1 \dots j'_q}}{\partial \bar{z}_k} \right. \right. \\
&\quad \left. \left. - a_k f_{i_1 \dots i_p j'_1 \dots j'_q} \right) \right) dz_{i_1} \wedge \dots \wedge dz_{i_p} \wedge d\bar{z}_{j_1} \wedge \dots \wedge d\bar{z}_{j_{q+1}},
\end{aligned}$$

სადაც $\sigma_{j_1, \dots, j_q, j_{q+1}}^{k, j'_1, \dots, j'_q}$ არის გადანაცვლება

$$\sigma_{j_1, \dots, j_q, j_{q+1}}^{k, j'_1, \dots, j'_q} = \begin{pmatrix} k & j'_1 & \dots & j'_q \\ j_1 & \dots & j_q & j_{q+1} \end{pmatrix}.$$

$q = 0$ -ისთვის

$$\bar{\partial}_\alpha: \mathcal{A}_X^{p,0}(U) \rightarrow \mathcal{A}_X^{p,1}(U),$$

ტოლობიდან $\bar{\partial}_\alpha(\omega) = 0$, ანუ, კოორდინატული სისტემის $(U, z_1, \dots, z_n: U \rightarrow \mathbb{C})$ მიმართ

$$\bar{\partial}_\alpha(\omega) = \sum_{\substack{1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_p \leq n \\ 1 \leq k \leq n}} \left(\frac{\partial f_{i_1 \dots i_p}}{\partial \bar{z}_k} - a_k f_{i_1 \dots i_p} \right) d\bar{z}_k \wedge dz_{i_1} \wedge \dots \wedge dz_{i_p} = 0,$$

გამომდინარეობს, რომ

$$\frac{\partial f_{i_1 \dots i_p}}{\partial \bar{z}_k} = a_k f_{i_1 \dots i_p}$$

ყოველი $1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_p \leq n$ და $1 \leq k \leq n$ -ისთვის, ანუ თვითოეული $f_{i_1 \dots i_p}$ ფუნქცია აკმაყოფილებს თვითოეული ცვლადის მიმართ კარლემან-ბერს-ვეკუას განტოლებას.

დებულება. იმისათვის, რომ ჰომომორფიზმთა მიმდევრობა

$$0 \rightarrow \mathcal{A}_X^{p,0}(X) \xrightarrow{\bar{\partial}_\alpha} \mathcal{A}_X^{p,1}(X) \xrightarrow{\bar{\partial}_\alpha} \dots \xrightarrow{\bar{\partial}_\alpha} \mathcal{A}_X^{p,q-1}(X) \xrightarrow{\bar{\partial}_\alpha} \mathcal{A}_X^{p,q}(X) \xrightarrow{\bar{\partial}_\alpha} \mathcal{A}_X^{p,q+1}(X) \xrightarrow{\bar{\partial}_\alpha} \dots$$

იყოს კომპლექსი, აუცილებელია და საკმარისი, რომ $\alpha \in \Gamma(X, \mathcal{A}_X^{0,1})$ იყოს ჩაკეტილი $\bar{\partial}$ -ის მიმართ, ანუ, $\bar{\partial}\alpha = 0$.

დამტკიცება. განვიხილოთ $\bar{\partial}_\alpha \circ \bar{\partial}_\alpha$ -ის მოქმედება $\omega \in \mathcal{A}_X^{p,q}(X)$ -ზე.

$$\begin{aligned} \bar{\partial}_\alpha \circ \bar{\partial}_\alpha(\omega) &= \bar{\partial}_\alpha(\bar{\partial}\omega - \alpha \wedge \omega) = \bar{\partial}(\bar{\partial}\omega - \alpha \wedge \omega) - \alpha \wedge (\bar{\partial}\omega - \alpha \wedge \omega) \\ &= \bar{\partial}(\bar{\partial}\omega) - \bar{\partial}(\alpha \wedge \omega) - \alpha \wedge \bar{\partial}\omega + \alpha \wedge \alpha \wedge \omega = -\bar{\partial}(\alpha \wedge \omega) - \alpha \wedge \bar{\partial}\omega \\ &= -((\bar{\partial}\alpha) \wedge \omega - \alpha \wedge \bar{\partial}\omega) - \alpha \wedge \bar{\partial}\omega = -(\bar{\partial}\alpha) \wedge \omega + \alpha \wedge \bar{\partial}\omega - \alpha \wedge \bar{\partial}\omega \\ &= -(\bar{\partial}\alpha) \wedge \omega, \end{aligned}$$

$(\bar{\partial}\alpha) \wedge \omega$ კი 0-ია ნებისმიერი $\omega \in \mathcal{A}_X^{p,q}(X)$ -ისთვის ნებისმიერი (p, q) -ისთვის მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როდესაც $\bar{\partial}\alpha = 0$.

□

ამ კომპლექსის კოჰომოლოგიის ჯგუფები აღინიშნება $H_{\bar{\partial}_\alpha}^{p,q}(X)$ -ით, ანუ

$$H_{\bar{\partial}_\alpha}^{p,q}(X) := \ker(\bar{\partial}_\alpha: \mathcal{A}_X^{p,q}(X) \rightarrow \mathcal{A}_X^{p,q+1}(X)) / \operatorname{im}(\bar{\partial}_\alpha: \mathcal{A}_X^{p,q-1}(X) \rightarrow \mathcal{A}_X^{p,q}(X)).$$

დოლბოს თეორემა ფსევდოანალიზურ დიფერენციალურ ფორმათა კონისათვის

$\bar{\partial}$ -ჩაკეტილი $\alpha \in \Gamma(X, \mathcal{A}_X^{0,1})$ ფორმისათვის განვიხილოთ კონათა კომპლექსი

$$0 \rightarrow \Psi_{X,\alpha}^p \xrightarrow{\operatorname{id}} \mathcal{A}_X^{p,0} \xrightarrow{\bar{\partial}_\alpha} \mathcal{A}_X^{p,1} \xrightarrow{\bar{\partial}_\alpha} \dots \xrightarrow{\bar{\partial}_\alpha} \mathcal{A}_X^{p,q-1} \xrightarrow{\bar{\partial}_\alpha} \mathcal{A}_X^{p,q} \xrightarrow{\bar{\partial}_\alpha} \mathcal{A}_X^{p,q+1} \xrightarrow{\bar{\partial}_\alpha} \dots$$

თუ ის ზუსტია $q = 1$ -ს ჩათვლით, მაშინ

$$0 \rightarrow \Psi_{X,\alpha}^p \xrightarrow{\text{id}} \mathcal{A}_X^{p,0} \xrightarrow{\bar{\partial}_\alpha} \mathcal{Z}_X^{p,1} \rightarrow 0,$$

სადაც $\mathcal{Z}_X^{p,q} = \ker \left(\mathcal{A}_X^{p,q} \xrightarrow{\bar{\partial}_\alpha} \mathcal{A}_X^{p,q+1} \right)$, ზუსტია; კონათა მოკლე ზუსტი მიმდევრობიდან შესაბამის კონათა კოჰომოლოგიის ჯგუფთა გრძელ მიმდევრობაზე გადასვლით გვექნება

$$0 \rightarrow \Gamma(X, \Psi_{X,\alpha}^p) \rightarrow \Gamma(X, \mathcal{A}_X^{p,0}) \rightarrow \Gamma(X, \mathcal{Z}_X^{p,1}) \rightarrow H^1(X, \Psi_{X,\alpha}^p) \rightarrow 0 \rightarrow H^1(X, \mathcal{Z}_X^{p,1}) \rightarrow \dots,$$

რადგან

$$H^n(X, \mathcal{A}_X^{p,q}) = 0, \quad n \geq 1,$$

საიდანაც

$$\begin{aligned} H^1(X, \Psi_{X,\alpha}^p) &\cong \Gamma(X, \mathcal{Z}_X^{p,1}) / \bar{\partial}_\alpha \left(\Gamma(X, \mathcal{A}_X^{p,0}) \right) \\ &= \ker \left(\bar{\partial}_\alpha: \mathcal{A}_X^{p,1}(X) \rightarrow \mathcal{A}_X^{p,2}(X) \right) / \text{im} \left(\bar{\partial}_\alpha: \mathcal{A}_X^{p,0}(X) \rightarrow \mathcal{A}_X^{p,1}(X) \right) = H_{\bar{\partial}_\alpha}^{p,1}(X), \end{aligned}$$

იმავე გრძელ ზუსტ მიმდევრობაში

$$\begin{aligned} 0 \rightarrow \Gamma(X, \Psi_{X,\alpha}^p) \rightarrow \Gamma(X, \mathcal{A}_X^{p,0}) \rightarrow \Gamma(X, \mathcal{Z}_X^{p,1}) \rightarrow H^1(X, \Psi_{X,\alpha}^p) \rightarrow 0 \rightarrow H^1(X, \mathcal{Z}_X^{p,1}) \rightarrow H^2(X, \Psi_{X,\alpha}^p) \\ \rightarrow 0 \rightarrow H^2(X, \mathcal{Z}_X^{p,1}) \rightarrow \dots \rightarrow H^{q-1}(X, \Psi_{X,\alpha}^p) \rightarrow 0 \rightarrow H^{q-1}(X, \mathcal{Z}_X^{p,1}) \rightarrow H^q(X, \Psi_{X,\alpha}^p) \\ \rightarrow 0 \rightarrow H^q(X, \mathcal{Z}_X^{p,1}) \rightarrow \dots, \end{aligned}$$

საიდანაც

$$H^q(X, \Psi_{X,\alpha}^p) \cong H^{q-1}(X, \mathcal{Z}_X^{p,1}),$$

სიზუსტე q -მდე მიმდევრობისა

$$0 \rightarrow \Psi_{X,\alpha}^p \xrightarrow{\text{id}} \mathcal{A}_X^{p,0} \xrightarrow{\bar{\partial}_\alpha} \mathcal{A}_X^{p,1} \xrightarrow{\bar{\partial}_\alpha} \dots \xrightarrow{\bar{\partial}_\alpha} \mathcal{A}_X^{p,q-1} \xrightarrow{\bar{\partial}_\alpha} \mathcal{A}_X^{p,q} \xrightarrow{\bar{\partial}_\alpha} \mathcal{A}_X^{p,q+1} \xrightarrow{\bar{\partial}_\alpha} \dots,$$

გულისხმობს, რომ მიმდევრობა

$$0 \rightarrow \mathcal{Z}_X^{p,1} \rightarrow \mathcal{A}_X^{p,1} \xrightarrow{\bar{\partial}_\alpha} \mathcal{Z}_X^{p,2} \rightarrow 0$$

ზუსტია, რომლის შესაბამის კოჰომოლოგიის ჯგუფთა გრძელ მიმდევრობაზე გადასვლით გვექნება

$$\begin{aligned} 0 \rightarrow \Gamma(X, \mathcal{Z}_X^{p,1}) \rightarrow \Gamma(X, \mathcal{A}_X^{p,1}) \rightarrow \Gamma(X, \mathcal{Z}_X^{p,2}) \rightarrow H^1(X, \mathcal{Z}_X^{p,1}) \rightarrow 0 \rightarrow H^1(X, \mathcal{Z}_X^{p,2}) \rightarrow H^2(X, \mathcal{Z}_X^{p,0}) \\ \rightarrow 0 \rightarrow H^2(X, \mathcal{Z}_X^{p,2}) \rightarrow \dots \rightarrow 0 \rightarrow H^{q-2}(X, \mathcal{Z}_X^{p,2}) \rightarrow H^{q-1}(X, \mathcal{Z}_X^{p,1}) \rightarrow 0 \\ \rightarrow H^{q-1}(X, \mathcal{Z}_X^{p,2}) \rightarrow H^q(X, \mathcal{Z}_X^{p,1}) \rightarrow 0 \rightarrow H^q(X, \mathcal{Z}_X^{p,2}) \rightarrow \dots, \end{aligned}$$

რომელი მიმდევრობის ნაწილიდანაც

$$0 \rightarrow H^{q-2}(X, Z_X^{p,2}) \rightarrow H^{q-1}(X, Z_X^{p,1}) \rightarrow 0$$

გამომდინარეობს, რომ

$$H^{q-1}(X, Z_X^{p,1}) \cong H^{q-2}(X, Z_X^{p,2}),$$

ანალოგიურად მომდევნო ნაბიჯებისთვისაც, რადგან გვაქვს მოკლე ზუსტი მიმდევრობები ჩათვლით

$$0 \rightarrow Z_X^{p,q} \rightarrow \mathcal{A}_X^{p,q} \xrightarrow{\bar{\partial}_\alpha} Z_X^{p,q+1} \rightarrow 0,$$

საიდანაც

$$H^q(X, \Psi_{X,\alpha}^p) \cong H^{q-1}(X, Z_X^{p,1}) \cong H^{q-2}(X, Z_X^{p,2}) \cong \dots \cong H^1(X, Z_X^{p,q-1}),$$

მოკლე ზუსტი მიმდევრობიდან

$$0 \rightarrow Z_X^{p,q-1} \rightarrow \mathcal{A}_X^{p,q-1} \xrightarrow{\bar{\partial}_\alpha} Z_X^{p,q} \rightarrow 0,$$

გამომდინარეობს

$$0 \rightarrow \Gamma(X, Z_X^{p,q-1}) \rightarrow \Gamma(X, \mathcal{A}_X^{p,q-1}) \rightarrow \Gamma(X, Z_X^{p,q}) \rightarrow H^1(X, Z_X^{p,q-1}) \rightarrow 0 \rightarrow H^1(X, Z_X^{p,q}) \rightarrow \dots,$$

შესაბამისად

$$\begin{aligned} H^1(X, Z_X^{p,q-1}) &\cong \frac{\Gamma(X, Z_X^{p,q})}{\bar{\partial}(\Gamma(X, \mathcal{A}_X^{p,q-1}))} \\ &= \frac{\ker(\bar{\partial}_\alpha: \mathcal{A}_X^{p,q}(X) \rightarrow \mathcal{A}_X^{p,q+1}(X))}{\operatorname{im}(\bar{\partial}_\alpha: \mathcal{A}_X^{p,q-1}(X) \rightarrow \mathcal{A}_X^{p,q}(X))} = H_{\bar{\partial}_\alpha}^{p,q}(X), \end{aligned}$$

ანუ

$$H^q(X, \Psi_{X,\alpha}^p) \cong H^1(X, Z_X^{p,q-1}) \cong H_{\bar{\partial}_\alpha}^{p,q}(X).$$

მაშასადამე,

$$H^q(X, \Psi_{X,\alpha}^p) \cong H_{\bar{\partial}_\alpha}^{p,q}(X)$$

იზომორფულობისთვის საკმარისია

$$0 \rightarrow \Psi_{X,\alpha}^p \xrightarrow{\operatorname{id}} \mathcal{A}_X^{p,0} \xrightarrow{\bar{\partial}_\alpha} \mathcal{A}_X^{p,1} \xrightarrow{\bar{\partial}_\alpha} \dots \xrightarrow{\bar{\partial}_\alpha} \mathcal{A}_X^{p,q-1} \xrightarrow{\bar{\partial}_\alpha} \mathcal{A}_X^{p,q} \xrightarrow{\bar{\partial}_\alpha} Z_X^{p,q+1} \rightarrow 0$$

კონათა ჰომომორფიზმთა კომპლექსის სიზუსტე, რაც ლოკალური საკითხია: სიზუსტისათვის საჭიროა ყოველი ჰომომორფიზმისათვის, მაგალითისთვის $\bar{\partial}_\alpha: \mathcal{A}_X^{p,q+1} \rightarrow \mathcal{A}_X^{p,q+2}$, ნებისმიერ ღია სიმრავლეზე $U \subseteq X$ ნებისმიერი ბირთვის ელემენტისთვის $\eta \in \ker(\bar{\partial}_\alpha: \mathcal{A}_X^{p,q+1}(U) \rightarrow \mathcal{A}_X^{p,q+2}(U)) \equiv Z_X^{p,q+1}(U)$ და ნებისმიერი

წერტილისათვის $P \in U$ არსებობდეს ღია მიდამო $P \in V \subseteq U$ და კვეთა $\omega \in \mathcal{A}_X^{p,q}(V)$ ისეთი, რომ

$$\bar{\partial}_\alpha(\omega) = \eta|_V;$$

ლოკალური კოორდინატული სისტემის მიმართ წარმოდგენებით

$$\omega = \sum_{\substack{1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_p \leq n \\ 1 \leq j_1 < j_2 < \dots < j_q \leq n}} f_{i_1, \dots, i_p, j_1, \dots, j_q} dz_{i_1} \wedge \dots \wedge dz_{i_p} \wedge d\bar{z}_{j_1} \wedge \dots \wedge d\bar{z}_{j_q},$$

$$\eta = \sum_{\substack{1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_p \leq n \\ 1 \leq j_1 < j_2 < \dots < j_{q+1} \leq n}} g_{i_1, \dots, i_p, j_1, \dots, j_{q+1}} dz_{i_1} \wedge \dots \wedge dz_{i_p} \wedge d\bar{z}_{j_1} \wedge \dots \wedge d\bar{z}_{j_{q+1}},$$

მივიღებთ განტოლებას

$$\sum_{\substack{1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_p \leq n \\ 1 \leq j_1 < j_2 < \dots < j_q < j_{q+1} \leq n}} \left(\sum_{\{k\} \cup \{j'_1, \dots, j'_q\} = \{j_1, \dots, j_q, j_{q+1}\}} (-1)^{p + \text{sgn}(\sigma_{j_1, \dots, j_q, j_{q+1}}^{k, j'_1, \dots, j'_q})} \left(\frac{\partial f_{i_1 \dots i_p j'_1 \dots j'_q}}{\partial \bar{z}_k} - a_k f_{i_1 \dots i_p j'_1 \dots j'_q} \right) \right. \\ \left. - a_k f_{i_1 \dots i_p j'_1 \dots j'_q} \right) dz_{i_1} \wedge \dots \wedge dz_{i_p} \wedge d\bar{z}_{j_1} \wedge \dots \wedge d\bar{z}_{j_{q+1}} = \eta$$

$$= \sum_{\substack{1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_p \leq n \\ 1 \leq j_1 < j_2 < \dots < j_{q+1} \leq n}} g_{i_1, \dots, i_p, j_1, \dots, j_{q+1}} dz_{i_1} \wedge \dots \wedge dz_{i_p} \wedge d\bar{z}_{j_1} \wedge \dots \wedge d\bar{z}_{j_{q+1}},$$

რომლის სათანადო საბაზო ვექტორების კოეფიციენტების ტოლობა გვაძლევს დიფერენციალურ განტოლებათა სისტემას

$$\sum_{\{k\} \cup \{j'_1, \dots, j'_q\} = \{j_1, \dots, j_q, j_{q+1}\}} (-1)^{p + \text{sgn}(\sigma_{j_1, \dots, j_q, j_{q+1}}^{k, j'_1, \dots, j'_q})} \left(\frac{\partial f_{i_1 \dots i_p j'_1 \dots j'_q}}{\partial \bar{z}_k} - a_k f_{i_1 \dots i_p j'_1 \dots j'_q} \right) = g_{i_1, \dots, i_p, j_1, \dots, j_{q+1}}$$

ყოველი ნაკრებისათვის $1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_p \leq n, 1 \leq j_1 < j_2 < \dots < j_{q+1} \leq n$,

ანუ გვაქვს

$$C_n^p \cdot C_n^{q+1} = \frac{n!}{p! \cdot (n-p)!} \cdot \frac{n!}{(q+1)! \cdot (n-q-1)!}$$

ცალი განტოლებისგან შემდგარი დიფერენციალურ განტოლებათა სისტემა.

მაგალითი. $\dim_{\mathbb{C}} X = 3$ შემთხვევაში და $\omega \in \mathcal{A}_X^{1,1}(V), \eta \in \mathcal{A}_X^{1,2}(U)$ კოორდინატული სისტემის $z_1, z_2, z_3: U \rightarrow \mathbb{C}$ მიმართ წარმოდგენებით

$$\omega = \sum_{1 \leq i, j \leq 3} f_{ij} dz_i \wedge d\bar{z}_j, \quad \eta = \sum_{\substack{1 \leq i \leq 3 \\ 1 \leq j < k \leq 3}} g_{ijk} dz_i \wedge d\bar{z}_j \wedge d\bar{z}_k,$$

$$\begin{aligned}
\bar{\partial}\omega &= \sum_{1 \leq i, j \leq 3} \left(\sum_{1 \leq k \leq 3} \frac{\partial f_{ij}}{\partial \bar{z}_k} d\bar{z}_k \wedge \right) dz_i \wedge d\bar{z}_j = \sum_{1 \leq i, j, k \leq 3} \frac{\partial f_{ij}}{\partial \bar{z}_k} d\bar{z}_k \wedge dz_i \wedge d\bar{z}_j \\
&= \sum_{1 \leq i, j, k \leq 3} \frac{\partial f_{ij}}{\partial \bar{z}_k} dz_i \wedge d\bar{z}_j \wedge d\bar{z}_k = \sum_{\substack{1 \leq i \leq 3 \\ 1 \leq j < k \leq 3}} \left(\frac{\partial f_{ij}}{\partial \bar{z}_k} - \frac{\partial f_{ik}}{\partial \bar{z}_j} \right) dz_i \wedge d\bar{z}_j \wedge d\bar{z}_k, \\
\alpha \wedge \omega &= \left(\sum_{1 \leq i \leq 3} a_i d\bar{z}_i \right) \wedge \left(\sum_{1 \leq i, j \leq 3} f_{ij} dz_i \wedge d\bar{z}_j \right) = \sum_{1 \leq i, j, k \leq 3} f_{ij} a_k dz_i \wedge d\bar{z}_j \wedge d\bar{z}_k \\
&= \sum_{\substack{1 \leq i \leq 3 \\ 1 \leq j < k \leq 3}} (f_{ij} a_k - f_{ik} a_j) dz_i \wedge d\bar{z}_j \wedge d\bar{z}_k, \\
&\sum_{\substack{1 \leq i \leq 3 \\ 1 \leq j < k \leq 3}} \left(\frac{\partial f_{ij}}{\partial \bar{z}_k} - \frac{\partial f_{ik}}{\partial \bar{z}_j} \right) dz_i \wedge d\bar{z}_j \wedge d\bar{z}_k \\
&= \sum_{\substack{1 \leq i \leq 3 \\ 1 \leq j < k \leq 3}} (f_{ij} a_k - f_{ik} a_j) dz_i \wedge d\bar{z}_j \wedge d\bar{z}_k + \sum_{\substack{1 \leq i \leq 3 \\ 1 \leq j < k \leq 3}} g_{ijk} dz_i \wedge d\bar{z}_j \wedge d\bar{z}_k \\
&= \sum_{\substack{1 \leq i \leq 3 \\ 1 \leq j < k \leq 3}} (f_{ij} a_k - f_{ik} a_j + g_{ijk}) dz_i \wedge d\bar{z}_j \wedge d\bar{z}_k, \\
\frac{\partial f_{ij}}{\partial \bar{z}_k} - \frac{\partial f_{ik}}{\partial \bar{z}_j} &= f_{ij} a_k - f_{ik} a_j + g_{ijk}, \quad 1 \leq i \leq 3, 1 \leq j < k \leq 3.
\end{aligned}$$

ფსევდონალიზურ E -მნიშვნელობიან დიფერენციალურ ფორმათა კონა

განვიხილოთ ჰოლომორფული ვექტორული ფიბრაცია

$$p: E \rightarrow X;$$

$\mathcal{A}_X^{p,q}(-, E)$ -ით აღვნიშნოთ კონა (p, q) -ტიპის დიფერენციალურ ფორმათა მნიშვნელობებით E -ში; ის ყოველ ღია ქვესიმრავლეს $U \subseteq X$ უსაზამებს

$$\bigwedge^{p,q} X \otimes E \rightarrow X$$

ვექტორული ფიბრაციის გლუვ კვეთებს U -ზე, ანუ,

$$U \mapsto \mathcal{A}_X^{p,q}(U, E) := \Gamma \left(U, \bigwedge^{p,q} X \otimes E \right).$$

განსაზღვრება. ფორმის მიმართ $\alpha \in \Gamma(X, \mathcal{A}_X^{0,1})$ განისაზღვრება კონათა ჰომომორფიზმი

$$\bar{\partial}_{E, \alpha}: \mathcal{A}_X^{p,q}(E) \rightarrow \mathcal{A}_X^{p,q+1}(E) \text{ შემდეგნაირად}$$

$$\bar{\partial}_{E,\alpha}: \mathcal{A}_X^{p,q}(U, E) \rightarrow \mathcal{A}_X^{p,q+1}(U, E), \quad \bar{\partial}_{E,\alpha} \left(\sum_{j=1}^n \omega_j \otimes e_j \right) := \sum_{j=1}^n \bar{\partial}_\alpha(\omega_j) \otimes e_j,$$

სადაც $e_1, e_2, \dots, e_n$ ფიბრაციის ლოკალური მატრივიალიზებული ჰოლომორფული კვეთებია (ფიბრაციის რანგი იყოს $\text{rank}(E) = n$); მოცემული განსაზღვრება კორექტულია, რადგან სხვა ლოკალური მატრივიალიზებული ჰოლომორფული კვეთების მიმართ $e'_1, \dots, e'_n$ კვეთის წარმოდგენისას ამგვარად განსაზღვრული მოქმედება იმავე კვეთას მოგვცემდა: g_{ij} იყოს ამ მატრივიალიზებულ კვეთათა მაკავშირებელი მატრიცი, ანუ,

$$e_j = \sum_{k=1}^n g_{jk} e'_k, \quad j = 1, \dots, n,$$

მაშინ იგივე კვეთა $\sum_{i=1}^n \omega_i \otimes e_i$ ჩაიწირება:

$$\sum_{j=1}^n \omega_j \otimes e_j = \sum_{j=1}^n \omega_j \otimes \left(\sum_{k=1}^n g_{jk} e'_k \right) = \sum_{k=1}^n \left(\sum_{j=1}^n g_{jk} \omega_j \right) \otimes e'_k,$$

შესაბამისად,

$$\begin{aligned} \bar{\partial}_{E,\alpha} \left(\sum_{k=1}^n \left(\sum_{j=1}^n g_{jk} \omega_j \right) \otimes e'_k \right) &= \sum_{k=1}^n \bar{\partial}_\alpha \left(\sum_{j=1}^n g_{jk} \omega_j \right) \otimes e'_k = \sum_{k=1}^n \left(\sum_{j=1}^n g_{jk} \bar{\partial}_\alpha(\omega_j) \right) \otimes e'_k \\ &= \sum_{j=1}^n \left(\bar{\partial}_\alpha(\omega_j) \otimes \sum_{k=1}^n g_{jk} e'_k \right) = \sum_{j=1}^n \bar{\partial}_\alpha(\omega_j) \otimes e_j. \end{aligned}$$

განსაზღვრება. კონათა ჰოლომორფიზმის $\bar{\partial}_{E,\alpha}: \mathcal{A}_X^{p,0}(E) \rightarrow \mathcal{A}_X^{p,1}(E)$ ბირთვს ეწოდება *ფსევდოანალიზურ E -მნიშვნელობიან p -დიფერენციალურ ფორმათა კონა X -ზე*; ის აღინიშნება $\Psi_{X,\alpha}^p(E)$ -ით, მისი კვეთების სიმრავლე $U \subseteq X$ ღია ქვესიმრავლეზე კი - $\Psi_{X,\alpha}^p(U, E) = \Gamma(U, \Psi_{X,\alpha}^p(E))$ -ით; ანუ

$$\Psi_{X,\alpha}^p(E) := \ker(\bar{\partial}_{E,\alpha}).$$

დებულება. $\Psi_{X,\alpha}^p(E)$ კონა $\mathcal{O}_X$ -მოდულთა კონაა.

დამტკიცება. განვიხილოთ ჰოლომორფული ფუნქციები $f, g \in \mathcal{O}_X(U)$ და კვეთები $\sigma, \tau \in \Psi_{X,\alpha}^p(U, E)$; ისინი E ფიბრაციის ლოკალური მატრივიალიზებული კვეთების მიმართ $e_1, \dots, e_n: V \rightarrow E, U \cap V \neq \emptyset$ წარმოდგენადია

$$\sigma = \sum_{j=1}^n \omega_j \otimes e_j, \quad \tau = \sum_{k=1}^n \eta_k \otimes e_k$$

სახით, სადაც $\omega_j, \eta_j \in \mathcal{A}_X^{p,0}(U \cap V), j = 1, \dots, n$ დიფერენციალური ფორმებია;

$$\begin{aligned}
\bar{\partial}_{E,\alpha}(f \cdot \sigma + g \cdot \tau) &= \bar{\partial}_{E,\alpha} \left(\sum_{j=1}^n (f\omega_j) \otimes e_j + \sum_{j=1}^n (g\eta_j) \otimes e_j \right) \\
&= \bar{\partial}_{E,\alpha} \left(\sum_{j=1}^n (f\omega_j \otimes e_j + g\eta_j \otimes e_j) \right) = \bar{\partial}_{E,\alpha} \left(\sum_{j=1}^n (f\omega_j + g\eta_j) \otimes e_j \right) \\
&= \sum_{j=1}^n (\bar{\partial}_\alpha(f\omega_j + g\eta_j)) \otimes e_j = \sum_{j=1}^n (f\bar{\partial}_\alpha(\omega_j) + g\bar{\partial}_\alpha(\eta_j)) \otimes e_j \\
&= f \sum_{j=1}^n (\bar{\partial}_\alpha(\omega_j)) \otimes e_j + g \sum_{j=1}^n (\bar{\partial}_\alpha(\eta_j)) \otimes e_j = f\bar{\partial}_{E,\alpha}(\sigma) + g\bar{\partial}_{E,\alpha}(\tau) = 0;
\end{aligned}$$

მაშასადამე $f \cdot \sigma + g \cdot \tau \in \Psi_{X,\alpha}^p(U, E)$.

□

დებულება. $\bar{\partial}$ -ჩაკეტილი $\alpha \in \Gamma(X, \mathcal{A}_X^{0,1})$ -ისთვის ჰომომორფიზმთა მიმდევრობა

$$0 \rightarrow \mathcal{A}_X^{p,0}(X, E) \xrightarrow{\bar{\partial}_{E,\alpha}} \mathcal{A}_X^{p,1}(X, E) \xrightarrow{\bar{\partial}_{E,\alpha}} \dots \xrightarrow{\bar{\partial}_{E,\alpha}} \mathcal{A}_X^{p,q-1}(X, E) \xrightarrow{\bar{\partial}_{E,\alpha}} \mathcal{A}_X^{p,q}(X, E) \xrightarrow{\bar{\partial}_{E,\alpha}} \mathcal{A}_X^{p,q+1}(X, E) \xrightarrow{\bar{\partial}_{E,\alpha}} \dots$$

კომპლექსია; ეს პირობა ამავედროულად აუცილებელიცაა იმისათვის, რომ მოცემული მიმდევრობა ადგენდეს კომპლექსს.

დამტკიცება. განვიხილოთ $\bar{\partial}_{E,\alpha} \circ \bar{\partial}_{E,\alpha}$ კომპოზიციის მოქმედება ნებისმიერ $\sigma \in \mathcal{A}_X^{p,q}(X, E)$ გლობალურ კვეთაზე; ლოკალური მატრივიალიზებული კვეთების მიმართ $e_1, \dots, e_n: U \rightarrow E$ გვექნება

$$\begin{aligned}
\bar{\partial}_{E,\alpha} \circ \bar{\partial}_{E,\alpha}(\sigma) &= \bar{\partial}_{E,\alpha} \circ \bar{\partial}_{E,\alpha} \left(\sum_{j=1}^n \omega_j \otimes e_j \right) = \bar{\partial}_{E,\alpha} \left(\bar{\partial}_{E,\alpha} \left(\sum_{j=1}^n \omega_j \otimes e_j \right) \right) \\
&= \bar{\partial}_{E,\alpha} \left(\sum_{j=1}^n (\bar{\partial}_\alpha(\omega_j)) \otimes e_j \right) = \sum_{j=1}^n (\bar{\partial}_\alpha(\bar{\partial}_\alpha(\omega_j))) \otimes e_j \\
&= \sum_{j=1}^n (\bar{\partial}_\alpha(\bar{\partial}(\omega_j) - \alpha \wedge \omega_j)) \otimes e_j \\
&= \sum_{j=1}^n (\bar{\partial}(\bar{\partial}(\omega_j) - \alpha \wedge \omega_j) - \alpha \wedge (\bar{\partial}(\omega_j) - \alpha \wedge \omega_j)) \otimes e_j \\
&= \sum_{j=1}^n (\bar{\partial}(\bar{\partial}(\omega_j)) - \bar{\partial}(\alpha \wedge \omega_j) - \alpha \wedge \bar{\partial}(\omega_j) + \alpha \wedge (\alpha \wedge \omega_j)) \otimes e_j \\
&= \sum_{j=1}^n (-\bar{\partial}(\alpha) \wedge \omega_j + \alpha \wedge \bar{\partial}(\omega_j) - \alpha \wedge \bar{\partial}(\omega_j)) \otimes e_j = - \sum_{j=1}^n (\bar{\partial}(\alpha) \wedge \omega_j) \otimes e_j \\
&= 0;
\end{aligned}$$

მაშასადამე მიმდევრობის ყოველი ჰომომორფიზმის ბირთვი მოიცავს წინა ჰომომორფიზმის ანასახს $\text{im}(\bar{\partial}_{E,\alpha}) \subseteq \ker(\bar{\partial}_{E,\alpha})$, ანუ ეს მიმდევრობა კომპლექსია.

□

ზემომოყვანილის მსგავსად E -მნიშვნელობიანი ფსევდოანალიზური დიფერენციალური ფორმებისთვისაც შეიძლება დაისვას საკითხი დოლბოს თეორემის სამართლიანობის შესახებ.

ერმიტული ბმულობა

განვიხილოთ ჰოლომორფული წრფეთა ფიბრაცია რიმანის ზედაპირზე [1, 2]

$$p: L \rightarrow X,$$

მასზე განსაზღვრული ბმულობით

$$\nabla: \mathcal{A}^0(L) \rightarrow \mathcal{A}^1(L),$$

სადაც $\mathcal{A}^0(L)$ ფიბრაციის გლუვ კვეთათა კონაა, ხოლო $\mathcal{A}^1(L)$ კი

$$T_{\mathbb{C}}^*X \otimes L \rightarrow X$$

ვექტორული ფიბრაციის გლუვ კვეთათა კონა, ანუ, $\mathbb{C}$ -წრფივი კონათა ჰომომორფიზმით, რომელიც აკმაყოფილებს ლაიბნიცის კანონს

$$\nabla(f \cdot \sigma) = (df) \otimes \sigma + f \nabla(\sigma),$$

სადაც $f: U \rightarrow \mathbb{C}$ ფუნქციაა, ხოლო $\sigma: U \rightarrow L$ კი - კვეთა, $U \subseteq X$ კი - X -ის ღია ქვესიმრავლე; ლოკალური მატრივიალიზებული კვეთის მიმართ $e: U \rightarrow L, U \subseteq X$ ნებისმიერი კვეთისთვის $\sigma \in \Gamma(U, L), \sigma = se$, სადაც $s: U \rightarrow \mathbb{C}$ ფუნქციაა, გვექნება

$$\nabla(\sigma) = \nabla(se) = (ds) \otimes e + s\nabla(e) = (ds) \otimes e + s\theta_e \otimes e = ((ds) + s\theta_e) \otimes e,$$

$\theta_e \in \Gamma(U, T_{\mathbb{C}}^*X)$ -ს ეწოდება *ბმულობის 1-ფორმა* $e: U \rightarrow L$ მატრივიალიზებული კვეთის მიმართ. დაშლიდან

$$T_{\mathbb{C}}^*X = (T^{1,0}X)^* \oplus (T^{0,1}X)^*$$

გვაქვს

$$T_{\mathbb{C}}^*X \otimes L \cong ((T^{1,0}X)^* \otimes L) \oplus ((T^{0,1}X)^* \otimes L),$$

საიდანაც

$$\mathcal{A}^1(L) = \mathcal{A}^{1,0}(L) \oplus \mathcal{A}^{0,1}(L),$$

სადაც $\mathcal{A}^{1,0}(L)$ -ით აღნიშნულია

$$(T^{1,0}X)^* \otimes L \rightarrow X$$

ვექტორული ფიბრაციის გლუვი კვეთების კონა, ხოლო $\mathcal{A}^{0,1}(L)$ -ით კი შესაბამისად

$$(T^{0,1}X)^* \otimes L \rightarrow X$$

ვექტორული ფიბრაციის გლუვი კვეთების კონა; ეს შესაძლებელს ხდის ბმულობა დაიშალოს კომპონენტებად

$$\nabla = \nabla^{1,0} \oplus \nabla^{0,1},$$

სადაც

$$\nabla^{1,0}: \mathcal{A}^0(L) \rightarrow \mathcal{A}^{1,0}(L),$$

ხოლო

$$\nabla^{0,1}: \mathcal{A}^0(L) \rightarrow \mathcal{A}^{0,1}(L).$$

$$\begin{aligned} \nabla(f \cdot \sigma) &= (df) \otimes \sigma + f\nabla(\sigma) = (\partial f + \bar{\partial} f) \otimes \sigma + f(\nabla^{1,0}\sigma + \nabla^{0,1}\sigma) \\ &= (\partial f \otimes \sigma + f\nabla^{1,0}\sigma) + (\bar{\partial} f \otimes \sigma + f\nabla^{0,1}\sigma) = \nabla^{1,0}(f \cdot \sigma) + \nabla^{0,1}(f \cdot \sigma), \end{aligned}$$

ანუ

$$\nabla^{0,1}(f \cdot s) = \bar{\partial} f \otimes s + f\nabla^{0,1}s;$$

იმავე თვისებას ფლობს კონათა ჰომომორფიზმი

$$\bar{\partial}_L: \mathcal{A}^0(L) \rightarrow \mathcal{A}^{0,1}(L),$$

განსაზღვრული ტრივიალიზებად ქვესიმრავლეზე $U \subseteq X$ მატრივიალიზებული კვეთით $e: U \rightarrow L$ შემდეგნაირად

$$\bar{\partial}_L(se) := (\bar{\partial}s) \otimes e,$$

რა განსაზღვრების კორექტულობასაც უზრუნველყოფს ფიბრაციის ჰოლომორფულობა; მართლაც სხვა მატრივიალიზებული კვეთისთვის $e': V \rightarrow L, U \cap V \neq \emptyset$ ჰოლომორფული გადასვლის ფუნქციით $h: U \cap V \rightarrow \mathbb{C}, e = he'$, გვაქვს

$$\bar{\partial}_L(she') = (\bar{\partial}sh) \otimes e' = h(\bar{\partial}s) \otimes e' = (\bar{\partial}s) \otimes (he') = (\bar{\partial}s) \otimes e = \bar{\partial}_L(se).$$

ბმულობას ეწოდება თავსებადი ჰოლომორფულ სტრუქტურასთან, თუ

$$\nabla^{0,1} = \bar{\partial}_L.$$

კომპლექსურ ვექტორულ ფიბრაციაზე $p: E \rightarrow X$ ერმიტული სტრუქტურა h უსაბამებს მრავალსახეობის ყოველ წერტილს $Q \in M$ ამ წერტილზე ფიბრაციის ფენაზე $E_Q \equiv p^{-1}(Q)$ ერმიტულ სკალარულ ნამრავლს

$$h_Q: E_Q \times E_Q \rightarrow \mathbb{C};$$

ერმიტულ ვექტორულ ფიბრაციაზე $(p: E \rightarrow X, h)$ ბმულობას ეწოდება ერმიტული ბმულობა h -ის მიმართ, თუ ნებისმიერი კვეთებისათვის $\sigma_1, \sigma_2 \in \Gamma(U, E), U \subseteq X$, სამართლიანია ტოლობა

$$d(h(\sigma_1, \sigma_2)) = h(\nabla(\sigma_1), \sigma_2) + h(\sigma_1, \nabla(\sigma_2)),$$

სადაც d გარე გაწარმოებაა, ხოლო კომპლექსური 1-ფორმისათვის $\alpha \in \Gamma(U, T_{\mathbb{C}}^*M)$ და კვეთებისათვის $\sigma, \tau \in \Gamma(U, E)$,

$$h(\alpha \otimes \sigma, \tau) := \alpha h(\sigma, \tau) \in \Gamma(U, T_{\mathbb{C}}^*M), \quad h(\sigma, \alpha \otimes \tau) := \bar{\alpha} h(\sigma, \tau) \in \Gamma(U, T_{\mathbb{C}}^*M).$$

ფსევდოანალიზურ ფუნქციათა განაწილებით მოცემული ერმიტული სტრუქტურა, რომლის მიმართაც მოცემული ბმულობა ერმიტულია

დებულება. თუ $h: U \rightarrow \mathbb{R}$ გლუვი ნამდვილმნიშვნელობიანი ფსევდოანალიზური ფუნქციაა $\bar{\theta}_e \in \mathcal{A}_X^{0,1}(U)$ -ის მიმართ, სადაც θ_e ბმულობის 1-ფორმაა $e: U \rightarrow L$ მატრივიალიზებული კვეთის მიმართ, ანუ $h \in \mathcal{O}_X^{\bar{\theta}_e, 0}(U)$, ან, რაც ნამდვილმნიშვნელობიანი ფუნქციისათვის ტოლფასია, $h \in \mathcal{O}_X^{0, \theta_e}(U)$, მაშინ h განსაზღვრავს ერმიტულ სტრუქტურას $L_U \equiv p^{-1}(U) \rightarrow U$ -ზე შემდმეგი წესით

$$\langle -, - \rangle_Q: L_Q \times L_Q \rightarrow \mathbb{C}, \quad (\sigma, \tau) \mapsto \langle \sigma, \tau \rangle_Q := s\bar{t}h(Q),$$

სადაც $\sigma = se(Q), \tau = te(Q)$, რომლის მიმართაც მოცემული ბმულობა ერმიტულია.

დამტკიცება. შესაბამემა $Q \mapsto \langle -, - \rangle_Q: L_Q \times L_Q \rightarrow \mathbb{C}, (\sigma, \tau) \mapsto \langle \sigma, \tau \rangle_Q$ მართლაც ერმიტული სტრუქტურაა L_U -ზე. განვიხილოთ ჰოლომორფული კვეთები $\sigma_1, \sigma_2: V \rightarrow$

$L_U, V \subseteq U$, მოცემულნი $e: U \rightarrow L_U$ -ის მიმართ კომპლექსურმნიშვნელობიანი ფუნქციებით

$$s_1, s_2: V \rightarrow \mathbb{C}, \quad \sigma_1 = s_1 e, \sigma_2 = s_2 e;$$

მათთვის

$$\begin{aligned} d\langle \sigma_1, \sigma_2 \rangle &= d(s_1 \overline{s_2} h) = \partial(s_1 \overline{s_2} h) + \overline{\partial}(s_1 \overline{s_2} h) = \overline{s_2} \partial(s_1 h) + s_1 \overline{\partial}(\overline{s_2} h) \\ &= \overline{s_2} (\partial(s_1) h + s_1 \overline{\partial}(h)) + s_1 (\overline{\partial}(\overline{s_2}) h + \overline{s_2} \overline{\partial}(h)) \\ &= \overline{s_2} \left(\left(\partial(s_1) + \frac{\overline{\partial}(s_1)}{0} \right) h + s_1 \partial(h) \right) + s_1 \left(\left(\overline{\partial}(\overline{s_2}) + \frac{\partial(\overline{s_2})}{0} \right) h + \overline{s_2} \overline{\partial}(h) \right) \\ &= \overline{s_2} (d(s_1) h + s_1 \overline{\partial}(h)) + s_1 (d(\overline{s_2}) h + \overline{s_2} \overline{\partial}(h)) \\ &= \overline{s_2} (d(s_1) h + s_1 \overline{\partial}(h)) + s_1 (d(\overline{s_2}) h + \overline{s_2} \overline{\partial}(h)) \\ &= \overline{s_2} (d(s_1) h + s_1 \theta_e h) + s_1 (d(\overline{s_2}) h + \overline{s_2} \overline{\theta}_e h) \\ &= \overline{s_2} (d(s_1) + s_1 \theta_e) h + s_1 (\overline{d(s_2) + s_2 \theta_e}) h \\ &= \langle (d(s_1) + s_1 \theta_e) \otimes e, \sigma_2 \rangle + \langle \sigma_1, (d(s_2) + s_2 \theta_e) \otimes e \rangle \\ &= \langle \nabla(\sigma_1), \sigma_2 \rangle + \langle \sigma_1, \nabla(\sigma_2) \rangle. \end{aligned}$$

□

დებულება. $(p: L \rightarrow X, \nabla)$ წრფივი ფიბრაციის საბაზო რიმანის ზედაპირის ღია დაფარვისათვის $X = \bigcup_{j \in J} U_j$ ლოკალური ტრივიალიზაციებით $\varphi_j: L_{U_j} \rightarrow U_j \times \mathbb{C}$ შესაბამისი მატრივიალიზებელი ჰოლომორფული კვეთებით $e_j: U_j \rightarrow L$ და ინდუცირებული ბმულობის 1-ფორმებით $\theta_j: U_j \rightarrow \Gamma(U_j, T^*X)$ ნამდვილმნიშვნელობიან გლუვ ფსევდოანალიზურ ფუნქციათა განაწილება $\{h_j \in \mathcal{O}_X^{\overline{\theta}_j, 0}(U_j)\}_{j \in J}$, რომელიც აკმაყოფილებს თანაკვეთებზე $U_j \cap U_k \neq \emptyset$ პირობას

$$h_k|_{U_j \cap U_k} = |f_{jk}|^2 h_j|_{U_j \cap U_k},$$

სადაც

$$f_{jk} \in \mathcal{O}_X^\times(U_j \cap U_k)$$

ყველგან ნულისაგან განსხვავებული გადასვლის ფუნქციაა

$$\varphi_j \circ \varphi_k^{-1}: (U_j \cap U_k) \times \mathbb{C} \rightarrow (U_j \cap U_k) \times \mathbb{C},$$

ასახვისათვის, ინდუცირებს ერმიტულ სტრუქტურას L -ზე თავსებადს ბმულობასთან, რომელიც ყოველი $Q \in X$ წერტილისათვის განისაზღვრება შემდეგნაირად

$$\langle -, - \rangle_Q: L_Q \times L_Q \rightarrow \mathbb{C}, \quad (\sigma, \tau) \mapsto \langle \sigma, \tau \rangle_Q := s_j \bar{t}_j h_j(Q),$$

სადაც $Q \in U_j$ და $\sigma = s_j e_j(Q), \tau = t_j e_j(Q)$.

დამტკიცება. ბმულობის 1-ფორმებს შორის კავშირის დასამყარებლად განვიხილოთ

$$\begin{aligned} \nabla(e_k) &= \theta_k \otimes e_k = \theta_k \otimes (f_{jk} e_j) = (f_{jk} \theta_k) \otimes e_j = \nabla(f_{jk} e_j) = d(f_{jk}) \otimes e_j + f_{jk} \theta_j \otimes e_j \\ &= (d(f_{jk}) + f_{jk} \theta_j) \otimes e_j; \end{aligned}$$

შესაბამისად

$$\theta_k = \frac{d(f_{jk})}{f_{jk}} + \theta_j;$$

მეორე მხრივ

$$\begin{aligned} \bar{\partial} h_k &= \bar{\partial} (|f_{jk}|^2 h_j) = \bar{\partial} (|f_{jk}|^2) h_j + |f_{jk}|^2 \bar{\partial} h_j = \bar{\partial} (f_{jk} \bar{f}_{jk}) h_j + |f_{jk}|^2 \bar{\theta}_j h_j \\ &= \bar{\partial} (f_{jk}) \bar{f}_{jk} h_j + |f_{jk}|^2 \bar{\theta}_j h_j = \overline{d(f_{jk})} f_{jk} h_j + |f_{jk}|^2 \bar{\theta}_j h_j \\ &= \frac{\overline{d(f_{jk})}}{\bar{f}_{jk}} |f_{jk}|^2 h_j + |f_{jk}|^2 \bar{\theta}_j h_j = \left(\frac{\overline{d(f_{jk})}}{\bar{f}_{jk}} + \theta_j \right) |f_{jk}|^2 h_j = \bar{\theta}_k h_k; \end{aligned}$$

მაშასადამე მოცემული პირობები თავსებადია; ზემომოყვანილი განსაზღვრება ერმიტული სტრუქტურისა დამოუკიდებელია ტრივიალიზებადი მიდამოს შერჩევისაგან, რადგან, თუ $Q \in U_j \cap U_k$ შესაბამისად $\sigma = s_k e_k(Q), \tau = t_k e_k(Q)$ მეორე მიდამოს მიმართ წარმოდგენით, მაშინ

$$\begin{aligned} \langle \sigma, \tau \rangle_Q &:= s_k \bar{t}_k h_k(Q) = f_{kj} s_j \overline{f_{kj} t_j} h_k(Q) = |f_{kj}|^2 s_j \bar{t}_j h_k(Q) = |f_{kj}|^2 s_j \bar{t}_j |f_{jk}|^2 h_j(Q) \\ &= s_j \bar{t}_j \frac{|f_{jk}|^2}{|f_{jk}|^2} h_j(Q) = s_j \bar{t}_j h_j(Q) = \langle \sigma, \tau \rangle_Q. \end{aligned}$$

□

დებულება. ლოკალურად სასრული ღია დაფარვისათვის $X = \cup_{j \in J} U_j$ ფსევდოანალიზურ ფუნქციათა განაწილებით $\{h_j \in \mathcal{O}_X^{\bar{\theta}_j, 0}(U_j)\}_{j \in J}$ განსაზღვრებადია წრფივ ფიბრაციაზე $(p: L \rightarrow X, \nabla)$ ბმულობით გლობალური ერმიტული სტრუქტურა ერთეულის დანაწევრების მეშვეობით, როგორც მიღებული ერმიტული სტრუქტურა აღარ არის, საზოგადოდ, თავსებადი ბმულობასთან.

დამტკიცება. განვიხილოთ მოცემულ დაფარვას დაქვემდებარებული ერთეულის დანაწევრება $\{g_i: X \rightarrow [0, 1]\} \subseteq \mathbb{R}_{i \in I}$, ანუ არსებობს ასახვა $\rho: I \rightarrow J$ ისეთი, რომ $\text{supp } g_i \subseteq U_{\rho(i)}$; ზემომოყვანილი წესით ლოკალურად h_j ფუნქციის მიერ $U_j \subseteq X$ ღია

ქვესიმრავლეზე განსაზღვრული ერმიტული სტრუქტურა აღვნიშნოთ $\langle -, - \rangle_j$ -ით, ხოლო მისი მნიშვნელობა $Q \in X$ წერტილში კი $\langle -, - \rangle_{jQ}$ -ით; ჯამში

$$\langle -, - \rangle = \sum_{i \in I} g_i \langle -, - \rangle_{\rho(i)},$$

ყოველი წერტილისათვის $Q \in X$ წევრთა მხოლოდ სასრული რიცხვია ნულისაგან განსხვავებული:

$$\langle -, - \rangle_Q = \sum_{i \in I} g_i(Q) \langle -, - \rangle_{\rho(i)Q},$$

ერმიტულ სკალარულ ნამრავლთა წრფივი კომბინაცია კი არაურყოფითი კოეფიციენტებით კვლავ ერმიტული სკალარული ნამრავლია; მართლაც ნებისმიერი $V, V_1, V_2, W \in L_Q \equiv p^{-1}(Q)$ და $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$ -ისთვის

$$\begin{aligned} \langle \lambda V_1 + \mu V_2, W \rangle_Q &= \left(\sum_{i \in I} g_i(Q) \langle -, - \rangle_{\rho(i)Q} \right) (\lambda V_1 + \mu V_2, W) = \sum_{i \in I} g_i(Q) \langle \lambda V_1 + \mu V_2, W \rangle_{\rho(i)Q} \\ &= \sum_{i \in I} (\lambda g_i(Q) \langle V_1, W \rangle_{\rho(i)Q} + \mu g_i(Q) \langle V_2, W \rangle_{\rho(i)Q}) \\ &= \lambda \sum_{i \in I} g_i(Q) \langle V_1, W \rangle_{\rho(i)Q} + \mu \sum_{i \in I} g_i(Q) \langle V_2, W \rangle_{\rho(i)Q} \\ &= \lambda \left(\sum_{i \in I} g_i(Q) \langle -, - \rangle_{\rho(i)Q} \right) (V_1, W) + \mu \left(\sum_{i \in I} g_i(Q) \langle -, - \rangle_{\rho(i)Q} \right) (V_2, W) \\ &= \lambda \langle V_1, W \rangle_Q + \mu \langle V_2, W \rangle_Q; \end{aligned}$$

ასევე

$$\begin{aligned} \overline{\langle V, W \rangle_Q} &= \overline{\left(\sum_{i \in I} g_i(Q) \langle -, - \rangle_{\rho(i)Q} \right) (V, W)} = \sum_{i \in I} \overline{g_i(Q) \langle V, W \rangle_{\rho(i)Q}} = \sum_{i \in I} g_i(Q) \overline{\langle V, W \rangle_{\rho(i)Q}} \\ &= \sum_{i \in I} g_i(Q) \langle W, V \rangle_{\rho(i)Q} = \left(\sum_{i \in I} g_i(Q) \langle -, - \rangle_{\rho(i)Q} \right) (W, V) = \langle W, V \rangle_Q; \end{aligned}$$

და

$$\langle V, V \rangle_Q = \left(\sum_{i \in I} g_i(Q) \langle -, - \rangle_{\rho(i)Q} \right) (V, V) = \sum_{i \in I} \underbrace{g_i(Q) \langle V, V \rangle_{\rho(i)Q}}_{\geq 0} \geq 0,$$

სადაც ტოლობას მხოლოდ იმ შემთხვევაში აქვს ადგილი, როდესაც ყოველი შესაკრები ნულია, რაც მხოლოდ მაშინ მოხდება, როდესაც $V = 0 \in L_Q$; მაშასადამე h_Q ყოველი წერტილისათვის $Q \in X$ წრფივია პირველი არგუმენტის მიმართ, შეუღლებურად სიმეტრიულია, საიდანაც გამომდინარე ნახევრადწრფივი მეორე არგუმენტის მიმართ,

და დადებითადაა განსაზღვრული, მაშასადამე ერმიტული სკალარული ნამრავლია ფენაზე L_Q ; შევამოწმოთ ბმულობასთან თავსებადობა; კვთებისათვის σ_1, σ_2 გვაქვს

$$\begin{aligned} d(\langle \sigma_1, \sigma_2 \rangle) &= d\left(\sum_{i \in I} g_i \langle \sigma_1, \sigma_2 \rangle_{\rho(i)}\right) = \sum_{i \in I} \left(d(g_i) \langle \sigma_1, \sigma_2 \rangle_{\rho(i)} + g_i d(\langle \sigma_1, \sigma_2 \rangle_{\rho(i)})\right) \\ &= \sum_{i \in I} \left(d(g_i) \langle \sigma_1, \sigma_2 \rangle_{\rho(i)} + g_i (\langle \nabla(\sigma_1), \sigma_2 \rangle_{\rho(i)} + \langle \sigma_1, \nabla(\sigma_2) \rangle_{\rho(i)})\right) \\ &= \sum_{i \in I} d(g_i) \langle \sigma_1, \sigma_2 \rangle_{\rho(i)} + \sum_{i \in I} g_i (\langle \nabla(\sigma_1), \sigma_2 \rangle_{\rho(i)} + \langle \sigma_1, \nabla(\sigma_2) \rangle_{\rho(i)}) \\ &= \sum_{i \in I} d(g_i) \langle \sigma_1, \sigma_2 \rangle_{\rho(i)} + \langle \nabla(\sigma_1), \sigma_2 \rangle + \langle \sigma_1, \nabla(\sigma_2) \rangle, \end{aligned}$$

მაშასადამე, ამგვარად განსაზღვრული გლობალური ერმიტული სტრუქტურის მიმართ მოცემული ბმულობა არ არის, საზოგადოდ, ერმიტული.

□

დასკვნა

მოყვანილია ფსევდოანალიზურ დიფერენციალურ ფორმათა კონა და კონათა ჰომომორფიზმი, რომლის ბირთვსაც ეს კონა წარმოადგენს, მოყვანილია აუცილებელი და საკმარისი პირობა იმისათვის, რომ ამ კონათა ჰომომორფიზმთა მიმდევრობა ადგენდეს კომპლექსს, დოლბოს თეორემის სამართლიანობის საკითხი დაყვანილია წრფივ კერძოწარმოებულებიან დიფერენციალურ განტოლებათა სისტემის ამონახსნის არსებობაზე, განხილულია ანალოგიური საკითხი ფსევდოანალიზურ დიფერენციალურ ფორმათა კონისათვის მნიშვნელობებით ჰოლომორფულ ვექტორულ ფიბრაციაში; მოყვანილია წრფეთა ფიბრაციაზე ჰოლომორფულ სტრუქტურასთან თავსებადი ბმულობით ერმიტული სტრუქტურის მოცემის ხერხი სათანადოდ შერჩეული ფსევდოანალიზური ფუნქციების მეშვეობით ისე, რომ მიღებული ერმიტული სტრუქტურის მიმართ მოცემული ბმულობა იყოს ერმიტული.

ბიბლიოგრაფია

- [1] L. Bers: Theory of pseudo-analytic functions. New York University, 1950.
- [2] P. Griffiths, J. Harris: Principles of Algebraic Geometry. A Wiley-Interscience Publication, 1978.
- [3] D. Huybrechts: Complex Geometry, An Introduction. Springer-Verlag New York, 1991.